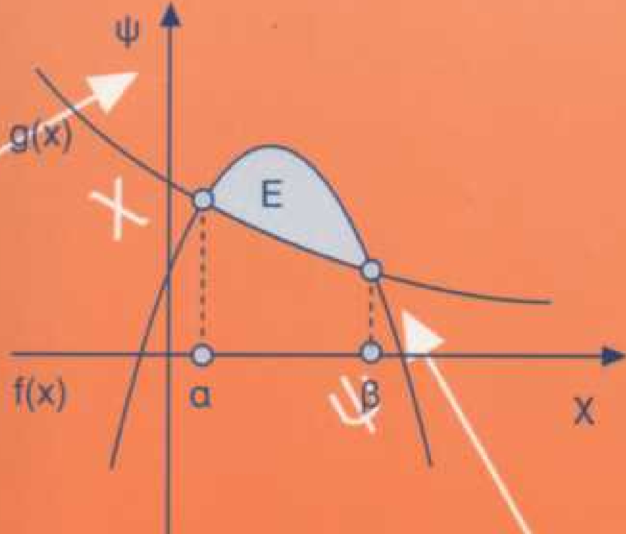
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ 1ης ΚΑΙ 4ης ΔΕΣΜΗΣ

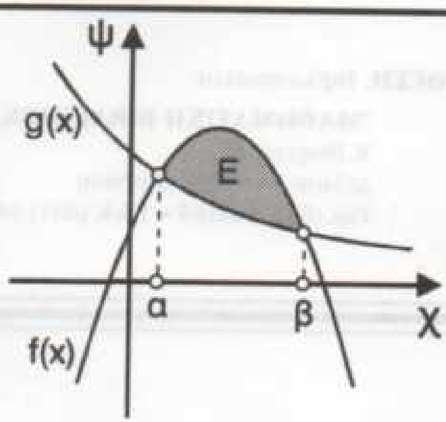


$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

ΚΑΛΑΜΑΤΑ 1995

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ 1ης ΚΑΙ 4ης ΔΕΣΜΗΣ



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

ΚΑΛΑΜΑΤΑ 1995

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: Βιβλιοπωλείο:
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ"
Χ.Βαφειάδης
Δέλιου 4 • 54621 Θεσ/νίκη
Τηλ.(031) 263163 • FAX (031) 240595

Φιλμ - Μοντάζ - Εκτύπωση:
Εκδόσεις - Γραφικές Τέχνες
ΠΗΓΑΣΟΣ 2000
Ομήρου 10 & Ν.Εγνατία
54 639 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 861.044 • Fax: (031) 850.180

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας περιέχει τις ασκήσεις που δημοσιεύθηκαν στην εφημερίδα της Καλαμάτας «ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ» τον Απρίλιο-Μάϊο-Ιούνιο του 1995, ως συμβολή του παραρτήματος Μεσσηνίας της ΕΜΕ στην προετοιμασία των υποψηφίων της 1ης και 4ης Δέσμης.

Το τεύχος είναι χωρισμένο σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος για την 1η Δέσμη, το 2ο μέρος για την 4η δέσμη. Είναι προφανές ότι οι ασκήσεις της 4ης δέσμης παρουσιάζουν ενδιαφέρον και για τους υποψήφιους της 1ης δέσμης. Σε αρκετές περιπτώσεις θεμάτων ισχύει και το αντίστροφο.

Έχει καταβληθεί προσπάθεια ώστε με το σύνολο των ασκήσεων κάθε δέσμης να καλύπτεται η εξεταστέα ύλη της δέσμης, όσο βέβαια επιτρέπει ο περιορισμένος αριθμός των θεμάτων.

Τα θέματα έχουν κατά κανόνα γενικό χαρακτήρα, κατά το μεγαλύτερο μέρος τους είναι πρωτότυπα και είναι προϊόν εργασίας και συνεργασίας πολλών μαθηματικών της Μεσσηνίας από τον Δημόσιο και Ιδιωτικό χώρο.

Το παράρτημα Μεσσηνίας θέλει να ευχαριστήσει θερμά όλους όσοι συνέβαλαν με τον οποιοδήποτε τρόπο στη διαμόρφωση αυτών των ασκήσεων. Θέλει επίσης να ευχαριστήσει ιδιαίτερα τον συνάδελφο μαθηματικό Θεόδωρο Παναγόπουλο για τον κόπο και το χρόνο που διέθεσε για τη γραφή των θεμάτων στο Computer και τον συνάδελφο εκδότη Χάρη Βαφειάδη για την προθυμία με την οποία ανέλαβε την έκδοση αυτού του τεύχους.

Ζητάμε την κατανόησή σας για τυχόν λάθη που θα επισημάνετε. Είμαστε έτοιμοι να δεχθούμε τις παρατηρήσεις σας, τις υποδείξεις σας, τα σχόλιά σας στη Διεύθυνση:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ
Φραντζή 6 24100 ΚΑΛΑΜΑΤΑ
Τηλ.- Fax: 0721-93639

Καλαμάτα Οκτώβρης 1995
Η ΔΙΟΙΚΟΥΣΑ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΟΥ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ
ΤΗΣ ΕΜΕ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ

1η

ΔΕΣΜΗ

ΘΕΜΑ 1.Α

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f(x)\geq f(e)=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f''(e)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=[f(e^x)]^2$ έχει τοπικό ελάχιστο.

Απόδειξη

Επειδή $f(x)\geq f(e)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η f παρουσιάζει στη θέση x=e ολικό, άρα και τοπικό ελάχιστο και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο e είναι σύμφωνα με το θ.Fermat, $f'(e)=0$ (1).

Επειδή f δυο φορές παραγωγίσιμη θα είναι και η g δυο φορές παραγωγίσιμη με $g'(x)=2f'(e^x)f(e^x)e^x$ (2) και

$$g''(x)=2f''(e^x)f(e^x)e^{2x}+2\left[f'(e^x)\right]^2e^{2x}+2f'(e^x)f(e^x)e^x \text{ ή}$$

$$g''(x)=2e^x\left[f''(e^x)f(e^x)e^x+\left(f'(e^x)\right)^2e^x+f'(e^x)f(e^x)\right] \quad (3)$$

θέτω x=1 και έχω: $g'(1)=2f'(e)f(e)e\overset{(1)}{=}0$

$g''(1)=2e[f''(e)f(e)e+0+0]=2e^2f(e)f''(e)=2e^2f''(e)$

αλλά $f''(e)\neq 0$. Αν είναι $f''(e)<0$ τότε f(e) τοπ. μέγιστο, άτοπο. Άρα $f''(e)>0$ οπότε και $g''(1)>0$ επομένως η g έχει στη θέση x=1 τοπ. ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 2.Α √

Έστω η υπερβολή $y=\frac{1}{x}$ και χορδή ΑΒ αυτής όπου Α,Β ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους της υπερβολής και Γ είναι σημείο της υπερβολής ώστε $B\hat{\Gamma}A=90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της υπερβολής στο Γ είναι κάθετη στη ευθεία ΑΒ.

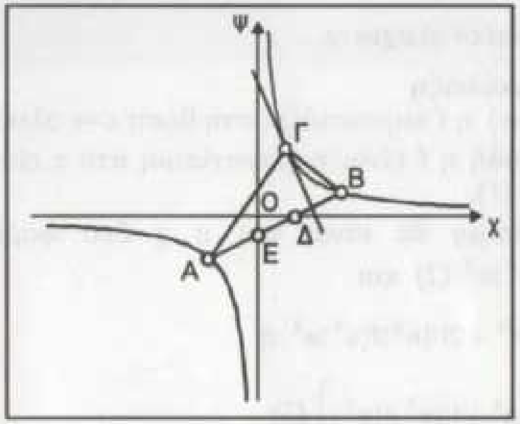
β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα Δ και Ε αντίστοιχα να δείξετε ότι ΑΔ=ΒΕ.

γ) Μια εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ τέμνει την υπερβολή $y=\frac{1}{x}$ σε δύο σημεία Κ,Λ. Να αποδείξετε ότι το μέσο του τμήματος ΚΛ κινείται σε παραβολή

Απόδειξη

α) Έστω

$A(\alpha,\frac{1}{\alpha})$, $B(\beta,\frac{1}{\beta})$ και $\Gamma(\gamma,\frac{1}{\gamma})$. Τότε $\vec{A\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma-\alpha \\ \frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma-\alpha \\ \frac{\alpha-\gamma}{\alpha\gamma} \end{bmatrix}$ και $\vec{B\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma-\beta \\ \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma} \end{bmatrix}$



επειδή

$AB \perp B\Gamma, \Rightarrow \vec{A\Gamma}\cdot\vec{B\Gamma}=0 \Rightarrow$

$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)+\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\alpha\beta\gamma^2}=0 \Rightarrow$

$1+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}=0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma^2=-1$ **(1)**

Η εφαπτομένη της $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $\Gamma(\gamma,\frac{1}{\gamma})$ έχει σ.δ. $f'(\gamma)=-\frac{1}{\gamma^2}$ και η AB έχει

σ.δ. $\lambda=\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}=-\frac{1}{\alpha\beta}$. Επομένως για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην AB αρκεί : $-\frac{1}{\gamma^2}\cdot(-\frac{1}{\alpha\beta})=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}=-1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma^2=-1$ που ισχύει λόγω της **(1)**

β) Η εξίσωση της AB είναι :

$y-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha\beta}(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad x+\alpha\beta y=\alpha+\beta \quad (2)$

Για $x=0 \Rightarrow y=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ άρα $E\left(0,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

Για $y=0$ $x=\alpha+\beta$ άρα $\Delta(\alpha+\beta,0)$. Επομένως

$(A\Delta)=\sqrt{(\alpha+\beta-\alpha)^2+\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2}=\sqrt{\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}}$

και $(BE)=\sqrt{(\beta-0)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-\frac{1}{\beta}\right)^2}=\sqrt{\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}}$ πότε $(A\Delta)=(BE) \Rightarrow A\Delta=BE$.

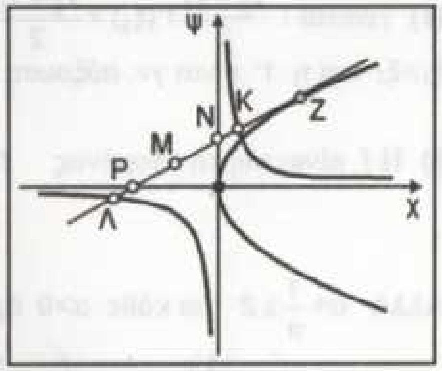
γ) Έστω $Z\left(\frac{y_o^2}{4},y_o\right)$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης

είναι : $yy_o=2\left(x+\frac{y_o^2}{4}\right)$ ή $yy_o=2x+\frac{y_o^2}{2}$.

Αυτή τέμνει τον άξονα yy' στο $N\left(0,\frac{y_o}{2}\right)$ και τον άξονα xx' στο $P\left(-\frac{y_o^2}{4},0\right)$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι ΚΝ=ΡΛ επομένως το μέσο Μ(x,y) του ΚΛ είναι το μέσο του ΡΝ. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{0+\left(-\frac{y_o^2}{4}\right)}{2}=-\frac{y_o^2}{8} \\ y&=\frac{\frac{y_o}{2}+0}{2}=\frac{y_o}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_o^2&=-8x \\ y_o&=4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{y^2=-\frac{1}{2}x}$ Δηλαδή το Μ κινείται σε παραβολή.



ΘΕΜΑ 3.Α

Έστω η συνάρτηση f κυρτή στο διάστημα $(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$.

β) Αν f γν. αύξ. στο $[1,+\infty)$ και $f(1)=\frac{1}{2}$ τότε $f(\alpha)+f(\frac{1}{\alpha})>1$ για κάθε α>1.

γ) $\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^x dx>\alpha-\frac{1}{\alpha}$ για κάθε α>1.

Απόδειξη

α) Έστω $x_1<x_2$,

$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)$ **(1)**

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}\Rightarrow f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_1)$$ και

$\xi_2\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_2)$ οπότε η

(1) γίνεται: $\frac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_1)>\frac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_2)\Leftrightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$ που ισχύει δι

$\xi_1>\xi_2$ και η f' είναι γν. αύξουσα συνάρτηση αφού η f είναι κυρτή.

β) Η f είναι κυρτή επομένως $f(\frac{1}{\alpha})+f(\alpha)>2f\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)$ **(2)**

Αλλά $\alpha+\frac{1}{\alpha}\ge 2$ για κάθε α>0 άρα και για α>1 οπότε $\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\ge 1\Rightarrow$

(f γν.αυξ.) $f\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)\ge f(1)\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)\ge\frac{1}{2}\Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)\ge 1$ **(3)**

Από (2),(3) $\Rightarrow f(\alpha)+f(\frac{1}{\alpha})>1$

γ) Θέτω $g(\alpha)=\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^x dx-\alpha+\frac{1}{\alpha},\ \alpha\ge 1$

Είναι $g'(\alpha)=\frac{1}{2e}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha}-\frac{1}{2e}\left(1+\alpha^2\right)e^{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)-1-\frac{1}{\alpha^2}=$

$=\frac{1}{2e}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha}+\frac{1}{2e}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\frac{1}{\alpha}}-\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)=\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{2e}e^{\alpha}+\frac{1}{2e}e^{\frac{1}{\alpha}}-1\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left[f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1\right]$

όπου $f(x)=\frac{1}{2e}e^x$ συνάρτηση με $f'(x)=\frac{1}{2e}e^x>0$ και $f''(x)=\frac{1}{2e}e^x>0$

δηλαδή f γν. αύξουσα, κυρτή στο R και $f(1)=\frac{1}{2}$.

Άρα $f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1>0$ για κάθε α>1 άρα $g'(\alpha)>0$ για κάθε α>1 οπότε

g γνησ. αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Επομένως αν α>1 είναι $\left.\begin{matrix}g(\alpha)>g(1)\\ g(1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow g(\alpha)>0\Rightarrow\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^x dx>\alpha+\frac{1}{\alpha}$

για κάθε α>1.

ΘΕΜΑ 4.Α

Να αποδειχθεί η ανισότητα: $\frac{(\alpha-1)^2}{4}+\alpha-1>\sqrt{2}\int_1^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1\neq x^2}}dx,\ \alpha>1$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση, $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{4}+\alpha-1-\sqrt{2}\int_1^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ \alpha\ge 1.$

Είναι $f'(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2}+1-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\alpha+1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha^2}},\alpha\ge 1.$

$f''(\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{1+\alpha^2}>0$ για κάθε $\alpha\ge 1$, οπότε f' είναι γν.αυξ. στο $[1,+\infty)$.

Επομένως, αν $\alpha>1\Rightarrow f'(\alpha)>f'(1)\Rightarrow f'(\alpha)>\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow f'(\alpha)>0$

Άρα f γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως, αν α>1

$\Rightarrow f(\alpha)>f(1)\Rightarrow f(\alpha)>0\Rightarrow\frac{(\alpha-1)^2}{4}+\alpha-1>\sqrt{2}\int_1^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

ΘΕΜΑ 4.Α

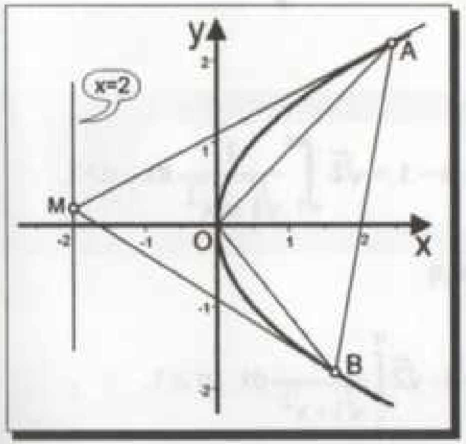
Δίνεται η παραβολή $y^2=2x$. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι σημεία της παραβολής τέτοια ώστε $B\hat{O}A=90^o$ να αποδείξετε ότι :

α) $x_1x_2=4$ και $y_1y_2=-4$

β) Η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο του άξονα x'x

γ) Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α,Β τέμνονται σε σημείο Μ το οποίο κινείται σε σταθερή ευθεία.

Απόδειξη



α) Είναι $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0 \Rightarrow y_1y_2=-x_1x_2 \;\textbf{(1)}$

Επίσης $\left.\begin{aligned} y_1^2=2x_1\\ y_2^2=2x_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1^2y_2^2=4x_1x_2$

$\Rightarrow (y_1y_2)^2=4x_1x_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (x_1x_2)^2=4x_1x_2$

$\overset{x_1\neq0,x_2\neq0}{\Rightarrow}\quad x_1x_2=4$ άρα και $y_1y_2=-4$

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0$$

Αλλά $x_1=\dfrac{y_1^2}{2}$, $x_2=\dfrac{y_2^2}{2}$ επομένως η εξίσωση της ΑΒ γράφεται:

$$x(y_1-y_2)-y\left(\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}\right)+\frac{y_1^2y_2}{2}-\frac{y_2^2y_1}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$2x(y_1-y_2)-y(y_1-y_2)(y_1+y_2)+y_1y_2(y_1-y_2)=0 \overset{y_1\neq y_2}{\Leftrightarrow}$$

$$2x-y(y_1+y_2)+y_1y_2=0 \Leftrightarrow 2x-y(y_1+y_2)-4=0$$

Για y=0 είναι x=2 άρα η ευθεία αυτη τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο(2,0) δηλαδή σε σταθερό σημείο.

γ) Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α,Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} yy_1=x+x_1\\ yy_2=x+x_2\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -x+yy_1=x_1\\ -x+yy_2=x_2\end{aligned}\right\},\; D=\begin{vmatrix}-1 & y_1\\ -1 & y_2\end{vmatrix}=y_1-y_2,\; D_x=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=$$

$$=x_1y_2-x_2y_1=\frac{y_1^2y_2}{2}-\frac{y_2^2y_1}{2}=\frac{y_1y_2(y_1-y_2)}{2}=\frac{-4(y_1-y_2)}{2}=-2(y_1-y_2)$$

Άρα $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-2(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=-2$. Δηλαδή οι εφαπτόμενες τέμνονται στην ευθεία $x=-2$, σταθερή ευθεία.

ΘΕΜΑ 4.Α

Α) α) Έστω η υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$ και δύο σημεία Α,Β στον ένα κλάδο αυτής. Αν $M(x_0,y_0)$ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $xx_o-yy_o=x_o^2-y_o^2$

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Γ,Δ να αποδείξετε ότι ΓΑ=ΒΔ

Β) Έστω ότι οι εφαπτόμενες στα Α,Β τέμνονται στο Θ και Ε σημείο του άλλου κλάδου της υπερβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε,Ο,Θ είναι συνευθειακά.

Απάντηση

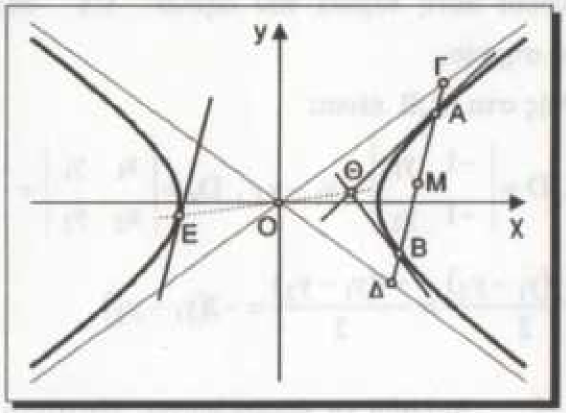
Α) α) Έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$. Τότε

$$\left.\begin{aligned} x_1^2-y_1^2=\alpha^2\\ x_2^2-y_2^2=\alpha^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1^2-y_1^2=x_2^2-y_2^2 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2) \quad \textbf{(1)}$$

Αν $x_1\neq x_2$ τότε $\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \Rightarrow \dfrac{2x_o}{2y_o}=\lambda_{AB} \Rightarrow \dfrac{x_o}{y_o}=\lambda_{AB}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι : $y-y_o=\dfrac{x_o}{y_o}(x-x_o) \Leftrightarrow$

$$yy_o-y_o^2=xx_o-x_o^2 \Leftrightarrow \boxed{xx_o-yy_o=x_o^2-y_o^2} \quad \textbf{(2)}$$



β) Οι ασύμπτωτες είναι: $y = x$, $y = -x$ επόμένως

$$\Gamma: \begin{cases} y = x \\ xx_o - yy_o = x_o^2 - y_o^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x_o - y_o) = x_o^2 - y_o^2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Είναι φανερό ότι $x_o \neq y_o$ διότι διαφορετικά το M θα ήταν σημείο της ασύμπτωτης $y=x$.

Άρα $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = x_o + y_o \end{cases}$, οπότε $\Gamma(x_0+y_0, x_0+y_0)$

$$\Delta: \begin{cases} y = -x \\ xx_o - yy_o = x_o^2 - y_o^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x_o + y_o) = x_o^2 - y_o^2 \end{cases} \quad (\Sigma')$$

Είναι $x_o + y_o \neq 0 \Rightarrow x_o \neq -y_o$ γιατί διαφορετικά το M θα ήταν σημείο της ασύμπτωτης $y = -x$.

Άρα $(\Sigma') \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = x_o - y_o \end{cases}$ οπότε $\Delta(x_o - y_o, y_o - x_o)$

Είναι ΜΑ=ΜΒ άρα για να αποδείξω ότι ΓΑ=ΒΔ αρκεί να αποδείξω ότι ΜΓ=ΜΔ.

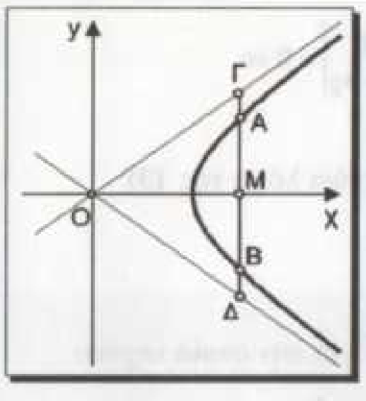
$(M\Gamma) = \sqrt{(x_o + y_o - x_o)^2 + (x_o + y_o - y_o)^2} = \sqrt{y_o^2 + x_o^2}$ και

$(M\Delta) = \sqrt{(x_o - y_o - x_o)^2 + (y_o - x_o - y_o)^2} = \sqrt{y_o^2 + x_o^2}$ άρα ΜΓ=ΜΔ.

Αν $x_1 = x_2$ η **(1)** γίνεται $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$

Αν $y_1 = y_2$ τότε $A \equiv B$ άτοπο, άρα $y_1 \neq y_2 \Rightarrow y_1 - y_2 \neq 0$

οπότε $y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2$.



Δηλαδή το M είναι στον x'x και έχει συντ/νες $M(x_o, 0)$

Επομένως $\Gamma(x_o, x_o)$, $\Delta(x_o, -x_o)$ οπότε $(M\Gamma) = \sqrt{x_o^2}$, $(M\Delta) = \sqrt{x_o^2}$, άρα πάλι ΜΓ=ΜΔ

Β) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής στα Α,Β ειναι:

$$\begin{cases} xx_1 - yy_1 = \alpha^2 \\ xx_2 - yy_2 = \alpha^2 \end{cases}, \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ x_2 & -y_2 \end{vmatrix} = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & -y_1 \\ \alpha^2 & -y_2 \end{vmatrix} = \alpha^2 y_1 - \alpha^2 y_2 = \alpha^2(y_1 - y_2), \quad D_y = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha^2 \\ x_2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^2(x_1 - x_2)$$

άρα $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha^2(y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha^2(x_1 - x_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$

δηλαδή $\Theta\left[\frac{\alpha^2(y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \frac{\alpha^2(x_1 - x_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}\right]$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο $E(x_E, y_E)$ είναι: $xx_E - yy_E = \alpha^2$ και έχει συντ. διεύθυνσης $\frac{x_E}{y_E}$

Η ευθεία ΑΒ έχει συντ.διεύθυνσης $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ επομένως $\frac{x_E}{y_E} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(3)**

Για να είναι τα Ε,Ο,Θ συνευθειακά αρκεί:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ \frac{\alpha^2(y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2} & \frac{\alpha^2(x_1 - x_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_E & y_E \\ \frac{\alpha^2(y_1-y_2)}{x_2y_1-x_1y_2} & \frac{\alpha^2(x_1-x_2)}{x_2y_1-x_1y_2}\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_E & y_E\\ y_1-y_2 & x_1-x_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$x_E(x_1-x_2)=y_E(y_1-y_2)\Leftrightarrow \frac{x_E}{y_E}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ που ισχύει λόγω της **(3)**

ΘΕΜΑ 6.Α

Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$$f(x)=x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt \quad (1)$$

Απάντηση

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται όπως είναι.
Η παραγώγιση γίνεται όταν η συνάρτηση που είναι μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνάρτηση του t κατά τον τύπο:
$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)$.
Πώς λοιπόν θα ξεκολλήσω το x από τον τύπο $f(x-t)$;
Μόνο με αλλαγή μεταβλητής.

Θέτω $x-t=u\Rightarrow t=x-u\Rightarrow dt=-du$

Αν t=0 τότε u=x και αν t=x τότε u=0 οπότε:

$$\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt=\int_x^0 e^{u-x}f(u)(-du)=$$

$$-\int_x^0 e^u e^{-x}f(u)du=e^{-x}\int_0^x e^u f(u)du$$

Άρα $f(x)=x+e^{-x}\int_0^x e^u f(u)du \Rightarrow$ (*Πολλαπλασιάζω με e^x*)

$e^x f(x)=xe^x+\int_0^x e^u f(u)du \Rightarrow$ *(παραγωγίζω)*

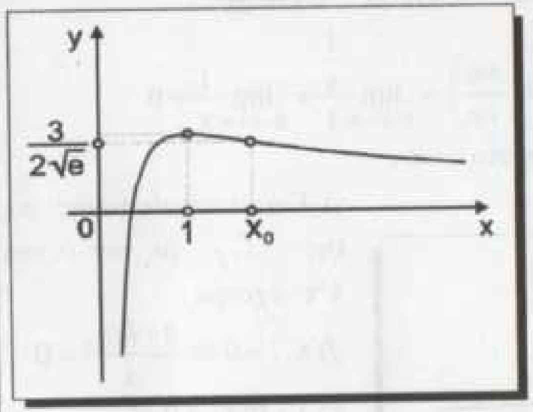
$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x+xe^x+e^x f(x)\Rightarrow e^x f'(x)=e^x+xe^x\Rightarrow f'(x)=1+x\Rightarrow$

$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+c$ **(2)** Από την **(1)** για x=0 είναι f(0)=0 άρα c=0

επομένως η **(2)** γίνεται $\boxed{f(x)=x+\frac{x^2}{2}}$

ΘΕΜΑ 6Α

Α) Στο παρακάτω σχήμα έχει γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτηση



$f(x)=\frac{\alpha+\beta\ln x}{x}$, με $\alpha,\beta\neq 0$

α) Να βρεθούν τα α και β
β) Να βρεθούν οι εξισώσεις το ασύμπτωτων της C_f *(αν υπάρχου*
γ) Να υπολογιστεί το εμβαδό χωρίου που περικλείεται από C_f, τον άξονα x'x, και εφαπτομένη της C_f στο σημ καμπής της.
Β) Να βρεθεί το πλήθος των ρι της $-x^2+2=2^x$

Απάντηση

Α) α) $f(x)=\frac{\alpha+\beta\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\beta\frac{1}{x}\cdot x-(\alpha+\beta\ln x)\cdot 1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\beta-\alpha-\beta\ln}{x^2}$

► Μέγιστο στο $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Leftrightarrow \beta-\alpha-\beta\ln 1=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=\beta}$ **(1)**

► $f''(x)=\frac{-\beta\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-(\beta-\alpha-\beta\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3\beta+2\alpha+2\beta\ln(x)}{x^3}$

► Καμπή στο $x_0\Rightarrow f''(x_0)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-3\alpha+2\alpha+2\alpha\ln x_0=0\Leftrightarrow 2\alpha\ln x_0=\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boxed{x_0=\sqrt{e}}$ **(2)**

► $\left(x_0,\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)\in C_f\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{e}}=\frac{\alpha+\beta\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow 2\alpha+2\beta\ln\sqrt{e}=3\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2\alpha+2\alpha\frac{1}{2}=3$

$\Leftrightarrow 3\alpha=3\Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$. Άρα $\boxed{\alpha=\beta=1}$ και $\boxed{f(x)=\frac{1+\ln x}{x}}$

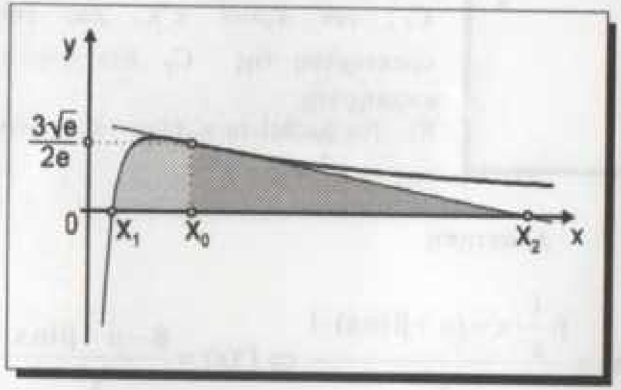
β) $A=(0,+\infty)$

► $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{x}=\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)=-\infty$ άρα η $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

➤ $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

➤ $\mu = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

άρα η $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.



γ) Για το σημείο τομής x_1 της C_f με τον άξονα x'x έχουμε:

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x_1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \ln x_1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x_1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{1}{e}}$

Είναι

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$. Άρα $f'(x_0) = f'(\sqrt{e}) = \dfrac{-\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = -\dfrac{1}{2e}$ και $f(x_0) = f(\sqrt{e}) =$

$= \dfrac{1+\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \dfrac{3}{2\sqrt{e}} = \dfrac{3\sqrt{e}}{2e}$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

στο x_0 είναι: $y - \dfrac{3\sqrt{e}}{2e} = -\dfrac{1}{2e}(x-\sqrt{e}) \Leftrightarrow 2ey + x - 4\sqrt{e} = 0$

Για $y = 0 \Rightarrow x = -4\sqrt{e}$, άρα η εφαπτομένη τέμνει τον x'x στο $x_2 = 4\sqrt{e}$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_{x_1}^{x_0} f(x)dx + \dfrac{1}{2}(x_2 - x_0)f(x_0) =$

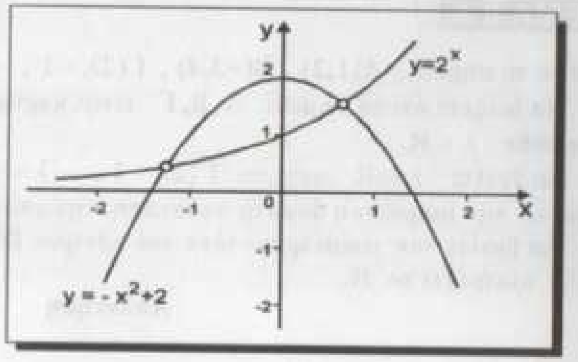
$= \int_{1/e}^{\sqrt{e}} \dfrac{1+\ln x}{x}dx + \dfrac{1}{2}(4\sqrt{e}-\sqrt{e})\cdot\dfrac{3\sqrt{e}}{2e} = \int_{1/e}^{\sqrt{e}} \dfrac{1}{x}dx + \int_{1/e}^{\sqrt{e}} \dfrac{\ln x}{x}dx + \dfrac{9}{4} =$

$= [\ln x]_{1/e}^{\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2}\int_{1/e}^{\sqrt{e}} \left[(\ln x)^2\right]' dx + \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_{1/e}^{\sqrt{e}} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{27}{8}$ τ.μ.

B)

Σχόλιο

Το πλήθος των ριζών της $2^x = -x^2 + 2$ *προκύπτει από τις τομές των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων* $y = 2^x$ *και* $y = -x^2 + 2$ *όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.*



➤ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2^x - 2$ (1) συνεχή στο $[-2,0]$ και στο $[0,1]$.

Είναι $\left.\begin{array}{l} f(-2) = 4 + \frac{1}{4} - 2 = \frac{9}{4} \\ f(0) = 0 + 1 - 2 = -1 \\ f(1) = 1 + 2 - 2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)f(0) = -\dfrac{9}{4} < 0$ και $f(0)f(1) = -1 < 0$

Άρα ισχύει το ***Θ.Bolzano*** στο διαστήματα $(-2,0)$, $(0,1)$ δηλαδή υπάρχουν

$\xi_1 \in (-2,0)$, $\xi_2 \in (0,1)$: $\begin{cases} f(\xi_1) = 0 \\ f(\xi_2) = 0 \end{cases}$ Άρα η (1) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-2,1)$

➤ Θα αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Έστω ότι η (1) έχει **3 τουλάχιστον** ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ στο $(-2,1)$.

Είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ και η f είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ παραγωγίσιμη στα (ρ_1,ρ_2), (ρ_2,ρ_3) με $f'(x) = 2x + 2^x\ln 2$. Άρα ισχύει το ***Θ.Rolle*** δηλ. υπάρχουν $x_1 \in (\rho_1,\rho_2)$, $x_2 \in (\rho_2,\rho_3)$: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ (2)

Αλλά η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και λόγω των (2) ισχύει το ***Θ.Rolle*** δηλ. υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$: $f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2^\xi(\ln 2)^2 = 0$ άτοπο γιατί $2 + 2^\xi(\ln 2)^2 > 0$ για κάθε $\xi \in R$.

Επομένως η (1) έχει **το πολύ** 2 ρίζες στο $(-2,1)$ και επειδή έχει και **τουλάχιστον 2** θα έχει **ακριβώς 2**. Άρα και η δοθείσα εξίσωση έχει 2 ακριβώς ρίζες στο (-2,1).

ΘΕΜΑ 8.Α √

Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(2\lambda+1\ ,\ -\lambda+1)$, $\lambda \in R$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου με σταθερό εμβαδό για κάθε $\lambda \in R$.

β) Να βρείτε $\lambda \in R$ ώστε το $\Gamma(2\lambda+1\ ,\ -\lambda+1)$ να απέχει από την αρχή των αξόνων την μικρότερη δυνατή απόσταση, την οποία να υπολογίσετε.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου ΑΒΓ όταν το λ διατρέχει το R.

Απάντηση

α)

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2\lambda+1 & -\lambda+1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2\lambda+1 & -\lambda+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2\lambda+1 & -\lambda+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=$$

$=3\lambda-3-8\lambda-4+\lambda-1+4\lambda+2+4+6=4\neq 0$. Επειδή $D\neq 0$ τα Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά, άρα για κάθε $\lambda\in R$, ορίζουν τρίγωνο.

► $E=\dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2\lambda+1 & -\lambda+1 & 1\end{matrix}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2$. Άρα σταθερό για κάθε $\lambda\in R$

β) $\left|\vec{O\Gamma}\right|^2=(2\lambda+1)^2+(-\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+1=5\lambda^2+2\lambda+2$

Το τριώνυμο $5\lambda^2+2\lambda+2$ έχει $\alpha=5>0$, άρα έχει ελάχιστο για $\lambda=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{-2}{10}=-\dfrac{1}{5}$ το $5\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2+2\left(-\dfrac{1}{5}\right)+2=\dfrac{5}{25}-\dfrac{2}{5}+2=\dfrac{45}{25}$.

Επομένως $\left|\vec{O\Gamma}\right|^2\geq\dfrac{45}{25}\Rightarrow\left|\vec{O\Gamma}\right|\geq\dfrac{\sqrt{45}}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Δηλαδή για $\lambda=-\dfrac{1}{5}$ το Γ απέχει από την αρχή Ο των αξόνων την μικρότερη απόσταση ίση με $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

γ) Έστω $G(x,y)$ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε

$$\left.\begin{matrix}x=\dfrac{x_A+x_B+x_\Gamma}{3}\\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_\Gamma}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\dfrac{1-3+2\lambda+1}{3}\\ y=\dfrac{2+4-\lambda+1}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\dfrac{-1+2\lambda}{3}\\ \lambda=-3y+7\end{matrix}\right\}\quad(1)$$

Με απαλοιφή του λ μεταξύ των (1) προκύπτει $3x+6y-13=0$. Άρα ο γ.τ. του Γ όταν $\lambda\in R$ είναι η ευθεία $3x+6y-13=0$.

ΘΕΜΑ 9.Α

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-x^2}$

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία καμπής της C_f βρίσκονται σε ευθεία.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία της C_f στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $M\in R:\ |f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in R$.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}\displaystyle\int_1^{x^2}\ln t\,dt\ , & x\neq 1\\ \alpha\ , & x=1\end{cases}$.

Να προσδιοριστεί το α ώστε η g να είναι συνεχής και στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα xx' και την ευθεία $x=\alpha$.

Απάντηση

$f(x)=xe^{-x^2}=\dfrac{x}{e^{x^2}}$, $x\in R$, $f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{e^{x^2}}$, $f''(x)=\dfrac{4x^3-6x}{e^{x^2}}=\dfrac{2x\left(2x^2-3\right)}{e^{x^2}}$

α) Είναι $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$ η $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ η $x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της $f''(x)$ προκύπτει ότι τα 0, $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ είναι θέσεις σημ. καμπής.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''		−	0	+	0	−	0	+	
f		∩		∪		∩		∪	

Πίνακας 1

$f(0)=0$, $f\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{e^{3/2}}$, $f\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=-\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{e^{3/2}}$. Επομένως τα σημεία καμπής είναι τα: $A\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{e^{3/2}}\right)$, $O(0,0)$,

$B\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ ,\ \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{e^{3/2}}\right)$ για τα οποία ισχύει:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3/2} & -\dfrac{\sqrt{3/2}}{e^{3/2}} & 1 \\ \sqrt{3/2} & \dfrac{\sqrt{3/2}}{e^{3/2}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{3/2} & -\dfrac{\sqrt{3/2}}{e^{3/2}} \\ \sqrt{3/2} & \dfrac{\sqrt{3/2}}{e^{3/2}} \end{vmatrix} = 0.$$ Άρα τα Α,Ο,Β συν/κά.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	↘	0

Πίνακας 2

β) $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f\left(\sqrt{2}/2\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$, $f\left(-\sqrt{2}/2\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$

Άρα τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπ. ακρότατα είναι τα:

$\Gamma\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$ και $\Delta\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$.

Τα κέντρα των κύκλων θα βρίσκονται στη μεσοκάθετο της ΓΔ. Μέσο της ΓΔ είναι το Ο(0,0), συντελεστής διεύθυνσης της ΓΔ είναι $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}/\sqrt{e}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ επομένως η εξίσωση είναι η $\boxed{y = -\sqrt{e}x}$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

επομένως σε συνδυασμό με τον πίνακα 2 προκύπτει ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}, \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right]$ δηλαδή ισχύει:

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ για κάθε $x \in R \Leftrightarrow |f(x)| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ $x \in R$. Άρα $M \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$

δ) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\int_1^{x^2} \ln t\,dt}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(\int_1^{x^2} \ln t\,dt\right)'}{\left[(x-1)^2\right]'} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x^2 \cdot (x^2)'}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x \ln x^2}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x' \ln x^2 + 2x(\ln x^2)'}{2} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2\ln x^2 + 4}{2} = 2.$

Άρα $E = \int_0^2 xe^{-x^2}dx = \int_0^2 \dfrac{\left(e^{-x^2}\right)'}{-2}dx = \left[\dfrac{e^{-x^2}}{-2}\right]_0^2 = \dfrac{e^4-1}{2e^4}$

ΘΕΜΑ 10.Α

Α. α) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Να βρείτε τ

παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = e^{1/x}f(x)$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f αν ισχύει:

(1) $f'(x) - \dfrac{1}{x^2}f(x) = e^{-1/x}$ για κάθε x>0

και η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο.

Β) α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2f'(x)}{x-1}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

Απάντηση

Α. α) Είναι $g'(x) = e^{1/x}f'(x) - \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}f(x)$

β) $g'(x) = e^{1/x}\left[f'(x) - \dfrac{1}{x^2}f(x)\right] = e^{1/x} \cdot e^{-1/x} = e^0 = 1$ άρα $g(x) = x + c =$

$\Rightarrow e^{1/x}f(x) = x + c \Rightarrow f(x) = (x+c)e^{-1/x}$ **(2)**

Προσδιορισμός του c

Αν θέσω x=1 στη δοθείσα σχέση **(1)** έχω: $f'(1) - f(1) = 1/e$ και επ

η f έχει στη θέση x=1 τ. ακρότατο είναι $f'(1) = 0$, Άρα $f(1) = -1/e$

Αν θέσω στη **(2)** x=1 έχω: $-1/e = (1+c) \cdot 1/e \Rightarrow 1 + c = -1 \Rightarrow c = -2$.

Άρα $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$ **(3)**

Β. α) Είναι $f'(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2}e^{-1/x} \Rightarrow x^2f'(x) = (x-1)(x+2)e^{-1/x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2f'(x)}{x-1} = (x+2)e^{-1/x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2f'(x)}{x-1} = 3e^{-1} = \dfrac{3}{e}$

β) Είναι $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$, $x \in (0,+\infty)$

► $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -2 \cdot 0 = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} e^{-1/x}\right.$

Άρα η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}e^{-1/x}=1\cdot e^{0}=1\Rightarrow\lambda=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{-1/x}-x\right]^{(\infty-\infty)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x-2}{x}e^{-1/x}-1\right)\right]^{(\infty\cdot 0)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-2}{x}e^{-1/x}-1}{1/x}\overset{(1/x=y\to0)}{=}\lim\limits_{y\to0}\frac{(1-2y)e^{-y}-1}{y}^{(\%)}=\lim\limits_{y\to0}\frac{-2e^{-y}-(1-2y)e^{-y}}{1}=$

$=-2-1=-3.$

Επομένως η ευθεία $y=x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 11.Α

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x\left(\int_2^y e^{t-y}\ln t\,dt\right)dy$ με $x,y>1$

α) Να βρεθεί η $F'(x)$.

β) Δείξτε ότι $F'(x)+F''(x)=\ln x$.

γ) Να βρεθεί η θέση ενός ακρότατου της F.

Απάντηση

α) Είναι $F'(x)=\left(\int_1^x\left(\int_2^y e^{t-y}\ln t\,dt\right)dy\right)'=\int_2^x e^{t-x}\ln t\,dt\Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x)=e^{-x}\int_2^x e^{t}\ln t\,dt$ **(1)**

β) Από την **(1)** $\Rightarrow e^{x}F'(x)=\int_2^x e^{t}\ln t\,dt\Rightarrow\left(e^{x}F'(x)\right)'=\left(\int_2^x e^{t}\ln t\,dt\right)'\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x}F'(x)+e^{x}F''(x)=e^{x}\ln x\overset{e^{x}\neq0}{\Rightarrow}F'(x)+F''(x)=\ln x$ **(2)**

γ) Αφού η F είναι παραγωγίσιμη πιθανές θέσεις ακρότατων είναι οι ρίζες της $F'(x)=0$.

Αρκεί λοιπόν να βρω μια ρίζα της $F'(x)=0$ που να μην είναι ρίζα της $F''(x)=0$.

Από τις **(1),(2)** $\Rightarrow F'(2)=0$ και $F''(2)=\ln 2>0$. Άρα η F στη θέση x=2

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $F(2)$

Παρατήρηση *Το F(2) δεν μπορεί να υπολογιστεί, άλλωστε δεν χρειάζεται διότι στο (γ) ερώτημα ζητάμε θέση ακρότατου.*

ΘΕΜΑ 12.Α

Α. Έστω συνάρτηση f : $xf''(x)+3xf'(x)=1-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να δείξετε ότι αν η f έχει ακρότατο στο $x_0\neq0$ αυτό είναι ελάχιστο.

β) Αν η f″ είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε στο σημείο αυτό η παρουσιάζει πάλι τοπικό ελάχιστο.

Β. Έστω $f(x)=x^{\alpha}e^{2\alpha-x}$, $x>0$, $\alpha>0$. Να βρείτε το α για το οποί μέγιστο της f γίνεται ελάχιστο.

Απάντηση

Α. α) Η f έχει ακρότατο στο x_0 , άρα $f'(x_0)=0$ **(2)**

(1) $\overset{x=x_0}{\Rightarrow}x_0f''(x_0)+3x_0f'(x_0)=1-e^{-x_0}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}x_0f''(x_0)=1-e^{-x_0}\overset{x_0\neq0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}\Leftrightarrow f''(x_0)=\frac{e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}}>0$ **(3)**

διότι: αν $x_0<0\Rightarrow e^{x_0}<e^{0}\Leftrightarrow e^{x_0}<1\Leftrightarrow e^{x_0}-1<0$, άρα $\frac{e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}}>0$

αν $x_0>0\Rightarrow e^{x_0}>e^{0}\Leftrightarrow e^{x_0}>1\Leftrightarrow e^{x_0}-1>0$, άρα $\frac{e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}}>0$

Άρα λόγω της **(3)** το ακρότατο της f στο x_0 είναι ελάχιστο.

β) Από την **(1)** για $x\neq0$ προκύπτει $f''(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}-3f'(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}^{\%}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}}{1}=1$ και $\lim\limits_{x\to0}3f'(x)=3f'(0)=0$ διότι η f′ ε συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη. Άρα $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=1$ και επειδή η είναι συνεχής στο 0 είναι $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=f''(0)\Rightarrow f''(0)=1>0$, οπότε θέση $x_0=1$ η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο.

Β. $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}-x^{\alpha}e^{2\alpha-x}=$

$=x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}(\alpha-x)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\alpha-x=0\Leftrightarrow x=\alpha$.

x	0		α		+∞
f′		+	0	-	
f		↗		↘	

Άρα στο $x_0=\alpha$ η f παρουσιάζει μέγιστο ίσο με $f(\alpha)=\alpha^{\alpha}e^{\alpha}$.

Έστω $g(x)=x^{x}e^{x}$, $x>0$.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
g'		-	0	+	
g		↘		↗	

Τότε $g'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'e^x+x^x\left(e^x\right)'=$

$=x^x(\ln x+1)e^x+x^xe^x=x^xe^x(\ln x+2)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+2=0\Leftrightarrow x=e^{-2}$

Άρα η g έχει μέγιστο στο $x=e^{-2}$

Άρα το μέγιστο της f γίνεται ελάχιστο όταν $\alpha=e^{-2}$.

ΘΕΜΑ 13.Α

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{A\Gamma}\right|=5$ και $\left|\overline{B\Gamma}\right|=6$

α) Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}$

β) Να βρεθεί η θέση του Θ αν $2\overline{\Theta A}+3\overline{\Theta B}+3\overline{\Theta\Gamma}=\overline{0}$

γ) Να αποδειχθεί ότι: $2\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}+\overline{\Theta\Gamma}\cdot\overline{\Theta A}+\overline{\Theta A}\cdot\overline{\Theta B}=-22$

δ) Να βρείτε το γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$2\overline{MB}\cdot\overline{M\Gamma}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{MA}+\overline{MA}\cdot\overline{MB}=14$$

Απάντηση

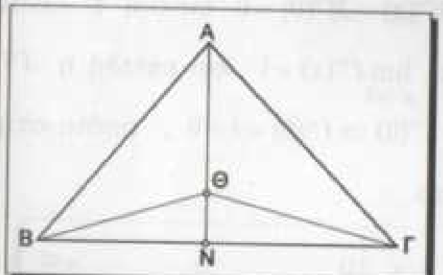
α) $\overline{A\Gamma}+\overline{\Gamma B}=\overline{AB}\Rightarrow\overline{\Gamma B}=\overline{AB}-\overline{A\Gamma}\Rightarrow\overline{\Gamma B}^2=\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\overline{\Gamma B}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{A\Gamma}\right|^2-2\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}\Rightarrow 36=50-2\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}\Rightarrow\boxed{\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}=7}$

β) Έστω Ν το μέσο της ΒΓ. Τότε:

$2\overline{\Theta A}+3\overline{\Theta B}+3\overline{\Theta\Gamma}=\overline{0}\Leftrightarrow 2\overline{\Theta A}+3\left(\overline{\Theta B}+\overline{\Theta\Gamma}\right)=\overline{0}\Leftrightarrow 2\overline{\Theta A}+3\,2\overline{\Theta N}=\overline{0}$

$\Leftrightarrow\overline{\Theta A}=-3\overline{\Theta N}\Leftrightarrow\overline{N\Theta}+\overline{\Theta A}=4\overline{N\Theta}\Leftrightarrow\overline{NA}=4\overline{N\Theta}\Leftrightarrow\overline{\Theta N}=\frac{1}{4}\overline{AN}$.



Άρα Θ σταθερό και μπορεί να βρεθεί η θέση του.

γ) Το τρίγ. ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα η διάμεσος ΑΝ θα είναι και ύψος.

Επομένως $\left|\overline{AN}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2-\left|\overline{BN}\right|^2=$

$=25-\dfrac{\left|\overline{B\Gamma}\right|^2}{4}=25-9=16\Rightarrow\left|\overline{AN}\right|=4$

Από $\overline{\Theta N}=\frac{1}{4}\overline{AN}\Rightarrow\left|\overline{\Theta N}\right|=\frac{1}{4}\left|\overline{AN}\right|\Rightarrow\left|\overline{\Theta N}\right|=1$, $\left|\overline{\Theta A}\right|=\frac{3}{4}\left|\overline{AN}\right|\Rightarrow\left|\overline{\Theta A}\right|=3$

Από τριγ. ΒΝΘ $\left(\hat{N}=90^0\right)$ είναι: $\left|\overline{B\Theta}\right|^2=\left|\overline{BN}\right|^2+\left|\overline{\Theta N}\right|^2=9+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\overline{B\Theta}\right|=\sqrt{10}$, ομοίως $\left|\overline{\Theta\Gamma}\right|=\sqrt{10}$.

Στο τριγ. ΒΘΓ η ΘΝ είναι διάμεσος άρα: $\overline{\Theta B}+\overline{\Theta\Gamma}=2\overline{\Theta N}\Rightarrow$

$\overline{\Theta B}^2+\overline{\Theta\Gamma}^2+2\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}=4\overline{\Theta N}^2\Rightarrow 10+10+2\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}=4\cdot 1^2\Rightarrow\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}=-8$

$2\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}+\overline{\Theta\Gamma}\cdot\overline{\Theta A}+\overline{\Theta A}\cdot\overline{\Theta B}=2(-8)+\overline{\Theta A}\left(\overline{\Theta\Gamma}+\overline{\Theta B}\right)=-16+\overline{\Theta A}\cdot 2\overline{\Theta N}=$

$=-16+2\cdot\frac{3}{4}\overline{NA}\cdot\left(-\frac{1}{4}\overline{NA}\right)=-16-\frac{3}{8}\left|\overline{NA}\right|^2=-16-\frac{3}{8}16=-22$.

δ) $2\overline{MB}\cdot\overline{M\Gamma}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{MA}+\overline{MA}\cdot\overline{MB}=14\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta B}\right)\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta\Gamma}\right)+\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta\Gamma}\right)\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta A}\right)+\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta A}\right)\left(\overline{M\Theta}+\overline{\Theta B}\right)=14$

$\Leftrightarrow 4\left|\overline{M\Theta}\right|^2+\overline{M\Theta}\left(2\overline{\Theta A}+3\overline{\Theta B}+3\overline{\Theta\Gamma}\right)+\left(2\overline{\Theta B}\cdot\overline{\Theta\Gamma}+\overline{\Theta\Gamma}\cdot\overline{\Theta A}+\overline{\Theta A}\cdot\overline{\Theta B}\right)=14$

$\overset{(\alpha),(\beta)}{\Leftrightarrow} 4\left|\overline{M\Theta}\right|^2+\overline{M\Theta}\cdot\overline{0}-22=14\Leftrightarrow\left|\overline{M\Theta}\right|^2=\frac{36}{4}\Leftrightarrow\left|\overline{M\Theta}\right|=3$.

Άρα ο γ.τ. του Μ είναι ο κύκλος (Θ,3).

ΘΕΜΑ 14.Α

α) Έστω F συνεχής στο [0,α], α>0. Να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\alpha}F(x)dx=\int_0^{\alpha}F(\alpha-x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\left[F(x)+F(\alpha-x)\right]dx$$

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $K=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{1995}}{x^{1995}+(1-x)^{1995}}dx$

Απάντηση

α) Θέτω $\alpha-x=y\Rightarrow -dx=dy\Rightarrow dx=-dy$

Για $x=0$ είναι $y=\alpha$, ενώ για $x=\alpha$ είναι $y=0$, οπότε

$\int_0^{\alpha}F(\alpha-x)dx=\int_{\alpha}^{0}F(y)(-dy)=\int_0^{\alpha}F(y)dy=\int_0^{\alpha}F(x)dx$ **(1)**

Είναι $\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\left[F(x)+F(\alpha-x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}F(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}F(\alpha-x)dx=$

$\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}F(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}F(x)dx=\int_0^{\alpha}F(x)dx\overset{(1)}{=}\int_0^{\alpha}F(\alpha-x)dx$.

β) Έστω $F(x)=\frac{x^{1995}}{x^{1995}+(1-x)^{1995}}$

Τότε $F(x)+F(1-x)=\frac{x^{1995}}{x^{1995}+(1-x)^{1995}}+\frac{(1-x)^{1995}}{(1-x)^{1995}+(1-1+x)^{1995}}=$

$=\frac{x^{1995}+(1-x)^{1995}}{x^{1995}+(1-x)^{1995}}=1$.

Άρα λόγω του **(α)** $K=\int_0^1 F(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1[F(x)+F(1-x)]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}[x]_0^1=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 15.Α

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με τις ιδιότητες :

- **Είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο (0,1)**
- **Υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, $0<x_1<x_2<1 : F(x_1)=F(x_2)=0$**
- **$F(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$**
- **Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$: $F'''(\xi)=0$**

Απάντηση

F 3 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1) \Rightarrow$ F συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) αφού $0<x_1<x_2<1$, ακόμα $F(x_1)=F(x_2)$ άρα από **Θ.Rolle** υπάρχει $\rho_1\in(x_1,x_2) : F'(\rho_1)=0$ **(1)**

Από υπόθεση $F(x)\geq 0$ και $F(x_1)=F(x_2)=0$, $0<x_1<x_2<1$ άρα : $F(x)\geq F(x_1)=F(x_2)$, δηλαδή η F παρουσιάζει στις θέσεις x_1,x_2 ελάχιστα

Τα x_1,x_2 είναι εσωτερικά σημεία του (0,1) και η F στα x_1,x_2 παρ/σιμη, άρα από **Θ.Fermat** $F'(x_1)=F'(x_2)=0$ **(2)**

Από **(1)**,**(2)** $\Rightarrow$ $F'(x_1)=F'(\rho_1)$, $F'(x_2)=F'(\rho_1)$ **(3)**

Λόγω της **(3)** και των αρχικών υποθέσεων η F' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στα $[x_1,\rho_1]$, $[\rho_1,x_2]$, άρα υπάρχουν ρ_2,ρ_3: $\rho_2\in(x_1,\rho_1) : F''(\rho_2)=0$, $\rho_3\in(\rho_1,x_2) : F''(\rho_3)=0 \Rightarrow F''(\rho_2)=F''(\rho_3)$ **(4)**

Λόγω της **(4)** και των αρχικών υποθέσεων η F'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Rolle** στο $[\rho_2,\rho_3]$, άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_2,\rho_3) : F'''(\xi)=0$ και αφού $(\rho_2,\rho_3)\subset(0,1)$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,1) : F'''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 16.Α *(Ζήτημα 1ο της 1ης Δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^0)$ και σημείο Μ του επιπέδου του τριγώνου τέτοιο ώστε :

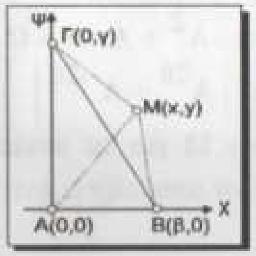
$$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)=\alpha^2,\ \text{όπου } \alpha=(B\Gamma).$$

Να αποδείξετε ότι το Μ κινείται σε κύκλο του οποίου να υπολογίσετε την ακτίνα.

Β. Έστω η υπερβολή $C: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ και το σημείο της $M\left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}, 4\varepsilon\varphi\theta\right)$ όπου $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

Αν η εφαπτομένη (ε) της C στο Μ τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Α , Β να αποδείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Απάντηση



Α. Θεωρώ σύστημα αναφοράς με αρχή Α και έστω Β(β,0) , Γ(0,γ) και Μ(x,y).

Είναι: $\overrightarrow{MB}=\begin{bmatrix}\beta-x\\-y\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{M\Gamma}=\begin{bmatrix}-x\\\gamma-y\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{MA}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$,

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\begin{bmatrix}\beta-2x\\\gamma-2y\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\begin{bmatrix}\beta-3x\\\gamma-3y\end{bmatrix}$

$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)=(\beta-2x)(\beta-3x)+(\gamma-2y)(\gamma-3y)$ οπότε

η δοθείσα σχέση γίνεται $(\beta-2x)(\beta-3x)+(\gamma-2y)(\gamma-3y)=\alpha^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2+6y^2-5\beta x-5\gamma y+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{5\beta}{6}x-\frac{5\gamma}{6}y=0$ όπου

$A^2+B^2-4\Gamma=\frac{25\beta^2}{36}+\frac{25\gamma^2}{36}=\frac{25\alpha^2}{36}>0$, άρα είναι κύκλος με ρ = 5α/12

Β. Εξίσωση της εφαπτ. είναι : $\frac{xx_1}{9}-\frac{yy_1}{16}=1\Leftrightarrow 16xx_1-9yy_1=144\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}-9y\cdot 4\varepsilon\varphi\theta=144\Leftrightarrow 4x-3y\eta\mu\theta=12\sigma\upsilon\nu\,\theta$ **(1)**

Ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\pm\frac{4}{3}x$

Τομή Α της (1) με την $y=\frac{4}{3}x$ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ 4x-3y\,\eta\mu\theta=12\sigma\upsilon\nu\,\theta \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta} \\ x=\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta} \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad A\left(\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta}, \frac{4\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta}\right)$$

Ομοίως τομή Β της (1) με την $y=-\frac{4}{3}x$ .... $B\left(\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1+\eta\mu\theta}, \frac{4\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1+\eta\mu\theta}\right)$

Θα δ.ο. $\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1+\eta\mu\theta}=2\cdot\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}$ (2) και $\frac{4\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{4\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1+\eta\mu\theta}=2\cdot 4\varepsilon\varphi\theta$ (3)

Για τη (2) $\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta(1+\eta\mu\theta+1-\eta\mu\theta)}{1-\eta\mu^2\theta}=\frac{3\sigma\upsilon\nu\,\theta\cdot 2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=2\cdot\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ισχύει και η (3)

ΘΕΜΑ 17.Α *(Ζήτημα 2ο της 1ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. α) Έστω Α πίνακας νxν όπου ν=1995 τέτοιος ώστε $A^2+A+I=O$

Να αποδείξετε ότι: $A^3=I$ και να βρείτε την ορίζουσα $\left|A^{20}+A^{-20}\right|$

β) Αν Α , Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A)=P(A'\cup B)=1/2$ και $P(B)=P(A\cup B')$ να αποδείξετε ότι :

i) $P(A\cap B)=0$ ii) $P(A)=P(B)$

Β. α) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu=\alpha$ με $\alpha\in C-\{0\}$

δίνονται από τον τύπο $z_\kappa=\sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right]$, $\kappa\in Z$

όπου $\rho=|\alpha|$ και φ ένα όρισμα του α .

β) Αν για τους μιγαδικούς z_1 , z_2 ισχύει $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1\cdot\overline{z_2}$ είναι φανταστικός .

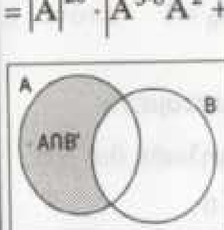
Απάντηση

Α. α) $A^2+A+I=O \Rightarrow A^3+A^2+A=O \Rightarrow A^3=-A^2-A=I$, επομένως

$A^{-1}=A^2$ και $|A^3|=|I| \Rightarrow |A|^3=1 \Rightarrow |A|=1$

$\left|A^{20}+A^{-20}\right|=\left|A^{20}+\left(A^2\right)^{20}\right|=\left|A^{20}+A^{40}\right|=\left|A^{20}\left(A^{20}+I\right)\right|=\left|A^{20}\right|\cdot\left|A^{20}+I\right|=$

$=|A|^{20}\cdot\left|A^{3\cdot 6}A^2+I\right|=1^{20}\cdot\left|A^2+I\right|=|-A|=(-1)^{1995}\cdot|A|=-1\cdot 1=-1.$



β) i) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A \Rightarrow \dots P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$P(A'\cup B)=1/2 \Rightarrow P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-P(A)+P(B)-\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=1/2$

$\Rightarrow 1/2+P(A\cap B)=1/2 \Rightarrow P(A\cap B)=0.$

ii) $P(A\cup B')=P(B) \Rightarrow P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(B) \Rightarrow$

$P(A)+1-P(B)-\left[P(A)-P(A\cap B)\right]=P(B) \Rightarrow 1=2P(B) \Rightarrow P(B)=1/2=P(A)$

Β. α) Βλέπε σχ. Βιβλίο.

β) $|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Rightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Rightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0 \Rightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=0 \Rightarrow z_1\overline{z_2}\in I$

ΘΕΜΑ 18.Α *(Ζήτημα 3ο της 1ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f και να αποδείξετε στη συνέχεια τη

ανίσωση : $x^{\frac{1}{x}}\le e^{x-1}$ για κάθε x>0

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλ

στον άξονα x'x

Β. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R , η οποί

τέμνει τον άξονα x'x στο $x_0=2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο

εφαπτομένη της διέρχεται από το σημείο $(2\xi, 0)$.

Απάντηση

Α. α) Πεδίο ορισμού της f είναι το $(0+\infty)$. $f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

Προφανής ρίζα της $f'(x)=0$ η x=1 (μοναδική διότι $g(x)=x^2-1+\ln x$ ↑

Αν x>1 είναι $x^2-1>0$, lnx>0 οπότε $f'(x)>0$, ενώ αν $0<x<1$ είναι $f'(x)<$

Άρα στη θέση 1 η f έχει ολικό ελάχιστο το f(1)=1.

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)\ge f(1) \Rightarrow x-\frac{\ln x}{x}\ge 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x}\le x-1$

$\Rightarrow \ln x^{1/x} \le x-1 \Rightarrow \ln x^{1/x} \le \ln e^{x-1} \Rightarrow x^{1/x} \le e^{x-1}$

β) Αν $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής πρέπει $f'(x_0)=0$. Η εξίσωση αυτή έχει *(βλέπε προηγούμενο ερώτημα)* μοναδική λύση $x_0=1$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $y-f(1)=0 \Rightarrow y=1$

Β. Θα δ.ο. υπάρχει $M(\xi, f(\xi))$ της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ να διέρχεται από το σημείο $(2\xi, 0)$. Δηλαδή θα δ.ο. υπάρχει ξ τέτοιο ώστε: $0-f(\xi)=f'(\xi)\cdot\xi \Leftrightarrow \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

Θεωρώ την $g(x)=xf(x)$, $x\in[0,2]$. Επειδή f συνεχής στο $[0,2]$ και παρ/μη στο $(0,2)$ με $g'(x)=f(x)+xf'(x)$ και $g(0)=0=g(2)$ ισχύει το Θ.Rolle οπότε υπάρχει ένα τουλ. $\xi\in(0,2): g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

ΘΕΜΑ 19.Α *(Ζήτημα 4ο της 1ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. α) Αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σε ένα διάστημα Δ, τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής: F+c , c∈R και μόνον αυτές.

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,\eta\mu t\,dt\right)$

Β. Δίνεται συνάρτηση $f: R\to R$ με f'' συνεχή στο R , η οποία στο $x_0\neq 0$ παρουσιάζει ακρότατο.

Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει η ισότητα: $x\cdot f(x)+x^2\cdot f''(x)-2f(x)=x\cdot e^x$,

να αποδείξετε ότι: $\int_0^{x_0} f(x)dx = e^{x_0}(1-x_0)-x_0\cdot f(x_0)-1$

Απάντηση

Α. α) Βλέπε σχ. Βιβλίο

β) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,\eta\mu t\,dt}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x^2}\,\eta\mu 2x\cdot 2}{2x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\sqrt{1+4x^2}\right)=2$

Β. Είναι $f'(x_0)=0$. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα και έχω:

$[xf(x)]_0^{x_0}-\int_0^{x_0}f(x)dx+[x^2f'(x)]_0^{x_0}-\int_0^{x_0}2xf'(x)dx-2\int_0^{x_0}f(x)dx=[xe^x]_0^{x_0}-\int_0^{x_0}e^x dx$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \int_0^{x_0}f(x)dx = e^{x_0}(1-x_0)-x_0\cdot f(x_0)-1$

ΘΕΜΑ 20.Α

Να αποδειχθεί ότι: $|z+4|+|z-2|\ge|z+2|+|z|$

Απάντηση

Επειδή τα μέλη της είναι μη αρνητικά η προς απόδειξη σχέση ισοδυνα με την:

$(|z+4|+|z-2|)^2 \ge (|z+2|+|z|)^2 \Leftrightarrow$

$|z+4|^2+|z-2|^2+2|z+4|\cdot|z-2| \ge |z+2|^2+|z|^2+2|z|\cdot|z+2| \Leftrightarrow$

$(z+4)(\bar z+4)+(z-2)(\bar z-2)+2|(z+4)(z-2)| \ge (z+2)(\bar z+2)+z\bar z+2|z(z+2)| \Leftrightarrow$

$z\bar z+4z+4\bar z+16+z\bar z-2z-2\bar z+4+2|z^2+2z-8| \ge z\bar z+2z+2\bar z+4+z\bar z+2|z^2+$

$\Leftrightarrow 16+2|z^2+2z-8| \ge 2|z^2+2z| \Leftrightarrow 8+|z^2+2z-8| \ge |z^2+2z|$ **(1)**

Αλλά λόγω της $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ είναι:

$8+|z^2+2z-8|=|8|+|z^2+2z-8|\ge|8+z^2+2z-8|=|z^2+2z|$ δηλ. ισχύει η

ΘΕΜΑ 21.Α

Έστω μιγαδικός αριθμός **z = x + yi**. Να βρείτε το γ.τ. των εικό **M(x,y)** του **z** , αν $\mathrm{Arg}\frac{z-i}{z-1}=\frac{\pi}{4}$

Απάντηση

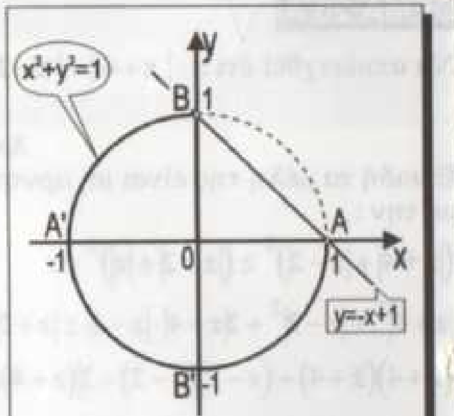
Είναι $\frac{z-i}{z-1}=\frac{x+yi-i}{x+yi-1}=\frac{x+(y-1)i}{(x-1)+yi}=\frac{[x+(y-1)i]\cdot[(x-1)-yi]}{(x-1)^2+y^2}=$

$=\frac{[x(x-1)+y(y-1)]+i[(y-1)(x-1)-xy]}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{-x-y+1}{(x-1)^2+y^2}i$

Επειδή $\mathrm{Arg}\frac{z-i}{z-1}=\frac{\pi}{4}$, η εικόνα του αριθμού $\frac{z-i}{z-1}$ βρίσκεται διχοτόμο της γωνίας xOy *(1ης γωνίας των αξόνων)*. Δηλαδή το διατετα νο ζεύγος $\left(\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{-x-y+1}{(x-1)^2+y^2}\right)$ επαληθεύει την εξίσωση διχοτόμου, δηλαδή τις: $y=x$, $x>0$, $y>0$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{-x-y+1}{(x-1)^2+y^2}\\[2mm] \dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}>0\\[2mm] \dfrac{-x-y+1}{(x-1)^2+y^2}>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-x-y=-x-y+1\\ x^2+y^2-x-y>0\\ -x-y+1>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$



$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=1\\ x+y<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=1\\ y<-x+1\end{array}\right\}$ Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι το τόξο ΒΑ'Β'Α του κύκλου κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1

ΘΕΜΑ 22.Α

Έστω η εξίσωση: $z^4+\lambda z^2+1=0$, $\lambda^2<4$, $\lambda\in R$

α) Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης ανήκουν στον ίδιο κύκλο, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και να βρείτε την ακτίνα.

β) Αν το όρισμα μιας ρίζας της είναι $\frac{\pi}{4}$ να βρείτε τις άλλες ρίζες.

Απάντηση

α) Αρκεί $|z|=\alpha$. Είναι $\Delta=\lambda^2-4<0$ άρα:

$$z^2=\frac{-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-4}}{2}=\frac{-\lambda\pm\sqrt{-\left(4-\lambda^2\right)}}{2}=\frac{-\lambda\pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}=\frac{-\lambda}{2}\pm\frac{i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}\Rightarrow$$

$$|z^2|=\sqrt{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{4-\lambda^2}{4}}=1\Rightarrow|z|^2=1\Rightarrow|z|=1.$$

Άρα οι εικόνες ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1

β) Έστω z_1 μια ρίζα της εξίσωσης με όρισμα $\frac{\pi}{4}$.

Τότε $z_1=|z_1|\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)=1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$ και επειδή είναι ρίζα

της εξίσωσης είναι: $\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^4+\lambda\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^2+1=0\Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\,\pi+i\eta\mu\,\pi+\lambda\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)^2+1=0\Rightarrow-1+i\cdot\lambda+1=0\Rightarrow i\cdot\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$$

Άρα $z^2=\frac{\pm i\sqrt{4}}{2}=\pm i$

$$z^2=i=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2},\quad z_\kappa=\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2},\quad \kappa=0,1$$

$$z_0=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2},\quad z_1=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-i\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

Οι άλλες δυο ρίζες είναι οι συζυγείς των z_0, z_1 διότι η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή: $z_2=\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$, $z_3=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$

ΘΕΜΑ 23.Α

α) Να λυθεί η εξίσωση: $z^6+2z^4+2z^2+1=z^5+z^3+z$ (1)

β) Αν z_1, z_2 είναι οι δύο διπλές ρίζες της (1) να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό: $w=\frac{z_1^6+z_2^6+z_1z_2}{z_1^3+z_2^3-z_1z_2}$

Απάντηση

Η (1) $\Rightarrow\left(z^6+z^4+z^2\right)+\left(z^4+z^2+1\right)=z\left(z^4+z^2+1\right)\Leftrightarrow$

$z^2\left(z^4+z^2+1\right)+\left(z^4+z^2+1\right)-z\left(z^4+z^2+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(z^4+z^2+1\right)\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\left(z^4+2z^2+1\right)-z^2\right]\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\left[\left(z^2+1\right)^2-z^2\right]\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow$

- $\left(z^2-z+1\right)^2=0$ (i) ή $z^2+z+1=0$ (ii) Η $z^2-z+1=0$ έχει

$\Delta=-3<0$ άρα ρίζες $\frac{1\pm i\sqrt3}{2}=\frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2}$, επομένως

η (i) έχει ρίζες $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ διπλές.

► Η (ii) έχει $\Delta=-3<0$ άρα ρίζες $-\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα η (1) έχει ρίζες $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ διπλές και $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

β) Επειδή οι διπλές ρίζες της (1) $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζες της (i) έχουμε:

$z_1^2-z_1+1=0\Rightarrow z_1^2=z_1-1\Rightarrow z_1^3=z_1^2-z_1\Leftrightarrow z_1^3=z_1-1-z_1\Rightarrow z_1^3=-1$

Ομοίως $z_2^3=-1$, οπότε $z_1^6=z_2^6=1$.

Επίσης από τους τύπους του **Vieta** είναι $z_1z_2=\frac{\gamma}{\alpha}=1$.

Επομένως $w=\frac{1+1+1}{-1-1-1}=\frac{3}{-3}=-1=1(\sigma\upsilon\nu\,\pi+i\eta\,\mu\pi)$

ΘΕΜΑ 24.Α

Έστω το πολυώνυμο $P(z)=\frac{1}{2}\left[(1+z)^{2\nu}+(z-1)^{2\nu}\right]$, $\nu\in N^*$. Να δείξετε ότι

α) Όλες οι ρίζες του είναι φανταστικές.

β) Αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής: $z^2+\kappa^2$, $\kappa\in R$

Απάντηση

α) Έστω z_0 τυχούσα ρίζα του P(z). Τότε $(1+z_0)^{2\nu}+(z_0-1)^{2\nu}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1+z_0)^{2\nu}=-(z_0-1)^{2\nu}\Leftrightarrow\left|(1+z_0)^{2\nu}\right|=\left|-(z_0-1)^{2\nu}\right|\Leftrightarrow|1+z_0|^{2\nu}=|z_0-1|^{2\nu}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|1+z_0|=|z_0-1|\Leftrightarrow|1+z_0|^2=|z_0-1|^2\Leftrightarrow(1+z_0)(1+\bar{z}_0)=(z_0-1)(\bar{z}_0-1)\Leftrightarrow$

$1+z_0+\bar{z}_0+z_0\bar{z}_0=1-z_0-\bar{z}_0+z_0\bar{z}_0\Leftrightarrow 2z_0+2\bar{z}_0=0\Leftrightarrow z_0+\bar{z}_0=0\Leftrightarrow\bar{z}_0=-z_0$

$\Leftrightarrow z_0\in I$. Δηλαδή το P(z) έχει όλες τις ρίζες του φανταστικούς αριθμούς.

β) Επειδή το P(z) έχει πραγματικούς συντελεστές για κάθε ρίζα κi έχει ρίζα και τη συζυγή της $-\kappa i$.

Άρα έχει παράγοντα: $(z-\kappa i)(z+\kappa i)=z^2+\kappa^2$.

Επειδή είναι βαθμού 2ν και $\alpha_{2\nu}=1$, έχει ν ρίζες ανά δύο συζυγείς, οπότε αναλύεται σε γινόμενο ν παραγόντων της μορφής $z^2+\kappa^2$

ΘΕΜΑ 25.Α

Έστω Α πίνακας 3x3, και το πολυώνυμο: $f(x)=|A-xI|$

α) Να αποδείξετε ότι το f(x) είναι τρίτου βαθμού.

β) Αν οι πίνακες $I-A$, $2I-A$, $3I-A$ είναι μη αντιστρέψιμοι, να δείξετε ότι ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος.

Απάντηση

α) Είναι $f(x)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-x\end{vmatrix}=$

$=(\alpha_{11}-x)\begin{vmatrix}\alpha_{22}-x & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}-x\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}-x\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}-x\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}=....$

$....=-x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu$, δηλαδή πολυώνυμο 3ου βαθμού.

β) Έστω $|I-A|=0\Rightarrow f(1)=0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

Ομοίως τα 2,3 είναι ρίζες του πολυωνύμου. Επειδή είναι 3ου βαθμού, αυτές είναι όλες οι ρίζες του f(x).

Αν ήταν $|A|=0$ τότε $f(0)=|A|=0$, δηλαδή το f(x) θα είχε και τέταρτη ρίζα, **άτοπο.** Άρα $|A|\neq 0$ οπότε Α αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 26.Α

Δίνεται ο πίνακας Α τύπου νxν με $A^4-A^3+A^2-A+I_\nu=O$ (1)

α) Να αποδειχθεί ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος

β) Αν ο Α είναι ρίζα του πολ/μου $f(X)=X^{1945}+\kappa X^{1940}+\lambda I_\nu$ με $\kappa,\lambda\in R$, να δειχθεί ότι $\kappa+\lambda=1$

Απάντηση

α) Είναι $A\neq O$ γιατί αν $A=O$ Θα ήταν *(από την (1))* $I_\nu=O$, άτοπο.

Πολ/ζουμε την (1) με Α και έχουμε:

$A^5-A^4+A^3-A^2+A=O\Rightarrow A^5=A^4-A^3+A^2-A\overset{(1)}{=}-I_\nu\Rightarrow A^5=-I_\nu\Rightarrow$

$\Rightarrow A\cdot A^4=A^4\cdot A=-I_\nu\Rightarrow A\cdot(-A^4)=(-A^4)\cdot A=I_\nu\Rightarrow\boxed{A^{-1}=-A^4}$

β) $f(A)=O\Leftrightarrow A^{1945}+\kappa A^{1940}+\lambda I_\nu=O\Leftrightarrow(A^5)^{389}+\kappa(A^5)^{388}+\lambda I_\nu=O\Leftrightarrow$

$(-I_\nu)^{389}+\kappa(-I_\nu)^{388}+\lambda I_\nu=O\Leftrightarrow -I_\nu+\kappa I_\nu+\lambda I_\nu=O\Leftrightarrow(\kappa+\lambda-1)I_\nu=O\Leftrightarrow$

$\kappa+\lambda-1=0\Leftrightarrow\boxed{\kappa+\lambda=1}$

ΘΕΜΑ 27.Α √

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$. Αν $(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}})=\frac{\pi}{4}$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}=(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

Απάντηση

__1ος τρόπος :__ Είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}})=\frac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow \frac{\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\,\varphi=1+1+2\sigma\upsilon\nu\,\varphi=$

$=2(\sigma\upsilon\nu\,\varphi+1) \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}$ (2) *(αφού $1+\sigma\upsilon\nu\varphi \geq 0$ για κάθε $\varphi \in R$)*

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\,\varphi=1\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu\,\varphi=\sigma\upsilon\nu\,\varphi$ (3)

$(1) \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}=1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi \Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi=(1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi)^2$

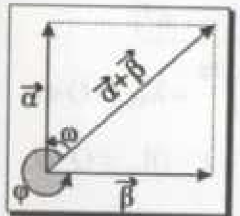
$\Leftrightarrow (1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi)(1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\,\varphi=-1 \Leftrightarrow \varphi=\pi \\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi=\pi/2 \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi=3\pi/2 \end{cases}$

► Αν $\hat{\varphi}=\pi$ τότε $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$ και η γωνία $\hat{\omega}=(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}})=\pi/4$ δεν ορίζεται, άρα $\hat{\varphi}=\pi$ απορρίπτεται.

► Αν $\hat{\varphi}=\pi/2$ τότε θα έχουμε το σχήμα 1 όπου $(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}})>\pi$ άτοπο διότι από υπόθεση $\hat{\omega}=\pi/4$, άρα $\hat{\varphi}=\pi/2$ απορρίπτεται.



σχ.1

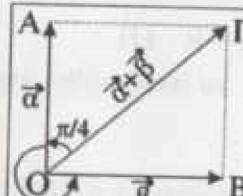


σχ.2

≈ Αν $\hat{\varphi}=3\pi/2$ έχουμε το σχήμα 2 όπου $\hat{\omega}=(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}})=\pi/4$, άρα $\hat{\varphi}=3\pi/2$ δεκτή.

__Παρατήρηση:__ Πάντα σε θέματα εύρεσης γωνίας πρέπει να εξετάζουμε τα αποτελέσματα αν συμβιβάζονται με τα δεδομένα του προβλήματος, όπως στο παραπάνω φάνηκε πως δεκτή γωνία είναι μόνο η $\hat{\varphi}=3\pi/2$

__2ος τρόπος :__ Έστω $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Το τετράπλευ



ΟΑΓΒ είναι παραλ/μο και επειδή οι διαδοχικ πλευρές ΟΑ, ΟΒ είναι ίσες (διότι $|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=1$ το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. Επομένως ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ και επει $\Gamma\hat{O}A=45^0$ είναι $A\hat{O}B=90^0$ επομένως θα έχου

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})=3\pi/2$.

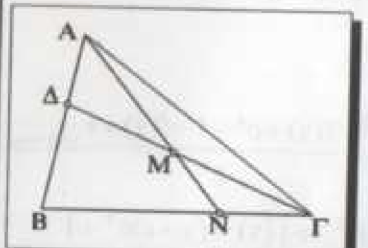
ΘΕΜΑ 28.Α √

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ το οποίο χωρίζει το διάνυσμα ΑΒ σ λόγο 2/3.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι μέσο του τμήματος ΓΔ αν κα μόνον αν $3\vec{MA}+2\vec{MB}+5\vec{M\Gamma}=0$.

β) Αν $(B,\Gamma,N)=5/2$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Μ,Ν είν συνευθειακά.

Απάντηση



α) Είναι $\overline{A\Delta}=\frac{2}{3}\overline{\Delta B}$ (1)

$3\overline{MA}+2\overline{MB}+5\overline{M\Gamma}=0 \Leftrightarrow$

$3(\overline{\Delta A}+\overline{M\Delta})+2(\overline{M\Delta}+\overline{\Delta B})+5\overline{M\Gamma}=0 \Leftrightarrow$

$5\overline{M\Delta}+3\overline{\Delta A}+2\overline{\Delta B}+5\overline{M\Gamma}=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$5\overline{M\Delta}-3\cdot\frac{2}{3}\overline{\Delta B}+2\overline{\Delta B}+5\overline{M\Gamma}=0 \Leftrightarrow 5\overline{M\Delta}+5\overline{M\Gamma}=0 \Leftrightarrow \overline{\Delta M}=\overline{M\Gamma}$ άρα Μ μέσον του ΓΔ.

β) Θα αποδείξουμε ότι $\overline{AM}=\rho\overline{AN}$. Έστω $\overline{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overline{A\Gamma}=\vec{\beta}$.

Επειδή $(B,\Gamma,N)=\frac{5}{2} \Rightarrow \overline{AN}=\frac{\overline{AB}+\frac{5}{2}\overline{A\Gamma}}{1+\frac{5}{2}}=\frac{2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}}{7}$ και

$\overline{AM}=\frac{\overline{A\Delta}+\overline{A\Gamma}}{2}=\frac{\frac{2}{5}\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}=\frac{2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}}{10}=\frac{7}{10}\frac{2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}}{7}$. Άρα $\overline{AM}=\frac{7}{10}\overline{AN}$

ΘΕΜΑ 29.Α

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα :

$$f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)-e^x-e^y+1 \quad \text{για κάθε } x,y\in R \quad (1)$$

α) Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=1$ να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f'(x)=f(x)+e^x-1$.

β) Αν $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{e^x}$ να αποδειχθεί ότι $h'(x)=1$ και κατόπιν να βρεθεί ο τύπος της f.

Απάντηση

α) $f'(0)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

Θέτω στην (1) x=y=0 και έχω $f(0)=f(0)+f(0)-1-1+1\Rightarrow f(0)=1$ άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x\in R$.

Είναι $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^x f(h)+e^h f(x)-e^x-e^h+1-f(x)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\left(f(x)\dfrac{e^h-1}{h}+e^x\dfrac{f(h)-1}{h}-\dfrac{e^h-1}{h}\right)$. Αλλά $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h}{1}=1$ και $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-1}{h}=1$. Άρα $f'(x)=f(x)+e^x-1$ (2)

β) $h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot e^x-e^x(f(x)-1)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}\overset{(2)}{=}\dfrac{f(x)+e^x-1-f(x)+1}{e^x}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow h(x)=x+c\Rightarrow\dfrac{f(x)-1}{e^x}=x+c\Rightarrow f(x)-1=(x+c)e^x\Rightarrow f(x)=(x+c)e^x+1$

Για $x=0$ είναι $f(0)=c+1\Rightarrow 1=c+1\Rightarrow c=0$, άρα $f(x)=xe^x+1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ **Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{x}-\vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi/3$**

α) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. *(απάντ. $\vec{x}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$)*

β) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{x}})$.

(απάντ. $συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{x}})=2\sqrt{7}/7$)

ΘΕΜΑ 30.Α

Ένα φροντιστήριο τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει 100 μαθητές. Την ίδια χρονική στιγμή ο ρυθμός προσέλευσης είναι 30 μαθητές το μήνα και ο ρυθμός αποχώρησης μαθητών είναι 12 μαθητές το μήνα αυξανόμενος με ρυθμό 3 μαθητές το μήνα.
Τη στιγμή $t=0$ η διεύθυνση του φροντιστηρίου περιμένει μια αύξηση του ρυθμού προσέλευσης κατά x μαθητές το μήνα ώστε στο τέλος του 6 ου μήνα ο αριθμός των μαθητών να γίνει 244.

α) Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών του φροντιστηρίου ως συνάρτηση του χρόνου t (σε μήνες).

β) Να βρεθεί το x.

Απάντηση

α) Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t είναι : Π(t) ο αριθμός των προσερχομένων/μήνα, A(t) ο αριθμός των αποχωρούντων/μήνα μαθητών και M(t) ο αριθμός των μαθητών του φροντιστηρίου.

- $A'(t)=3\Rightarrow A(t)=3t+c_1$. Για t=0 είναι A(0)=12 , άρα $c_1=12$, επομένως $\boxed{A(t)=3t+12}$
- $\Pi'(t)=x\Rightarrow \Pi(t)=xt+c_2$. Για t=0 είναι Π(0)=30 , άρα $c_2=30$, επομένως $\boxed{\Pi(t)=xt+30}$
- Η διαφορά $\Pi(t)-A(t)$ δίνει το ρυθμό μεταβολής του αριθμού των μαθητών τη χρονική στιγμή t , δηλαδή :

$M'(t)=\Pi(t)-A(t)=(x-3)t+18\Rightarrow M(t)=(x-3)\dfrac{t^2}{2}+18t+c_3$. Για t=0

M(0)=100, άρα $c_3=100$. Επομένως : $\boxed{M(t)=(x-3)\dfrac{t^2}{2}+18t+100}$.

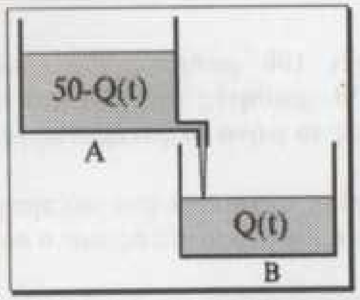
β) Για t=6 είναι M(t)=244 άρα $244=(x-3)\dfrac{6^2}{2}+18\cdot6+100\Rightarrow\boxed{x=5}$.

Άρα η αναμενόμενη αύξηση του ρυθμού προσέλευσης τη χρονική στιγμή t=0 είναι 5 μαθητές το μήνα.

ΘΕΜΑ 31.Α

Ένα υλικό μεταφέρεται από ένα δοχείο Α σε ένα δοχείο Β με ρυθμό ανάλογο της ποσότητας που παραμένει στο δοχείο Α . Αν η αρχική ποσότητα είναι 50 και έχει μείνει $50/e^2$ στο δοχείο Α όταν $t=6$, πότε η απομένουσα ποσότητα στο δοχείο Α θα γίνει το $1/10$ της αρχικής ;
(Δίνεται $\ln10=2{,}3$)

Απάντηση



Έστω Q(t) η ποσότητα υλικού που έχει μεταφερθεί στο δοχείο Β.

Είναι : $Q'(t)=\kappa(50-Q(t)) \Rightarrow \frac{Q'(t)}{50-Q(t)}=\kappa \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(50-Q(t))'}{50-Q(t)}=-\kappa \Rightarrow \int \frac{(50-Q(t))'}{50-Q(t)}dt=-\kappa\int dt$

$\Rightarrow \ln(50-Q(t))=-\kappa t+c$ **(1)**

Για t=0 , Q(0)=0 . Άρα **(1)** $\Rightarrow c=\ln 50$ και $\ln\frac{50-Q(t)}{50}=-\kappa t$ ή

$50-Q(t)=50e^{-\kappa t}$ **(2)** . Για t=6 , $50-Q(6)=50/e^2$ **(3)**

(2),(3) $\Rightarrow 50e^{-6\kappa}=\frac{50}{e^2}\Rightarrow \boxed{\kappa=\frac{1}{3}}$. Άρα η **(2)** γίνεται $50-Q(t)=50e^{-t/3}$.

Πρέπει $50-Q(t)=\frac{1}{10}50=5$. Άρα $5=50e^{-t/3}\Rightarrow e^{-t/3}=\frac{1}{10}\Rightarrow -\frac{t}{3}\ln e=-\ln 10$

$\Rightarrow \frac{t}{3}=2{,}3\Rightarrow \boxed{t=6{,}9}$

ΘΕΜΑ 32.Α

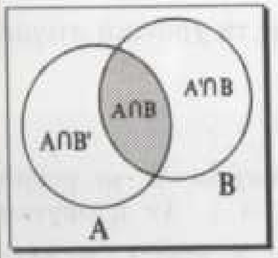
Αν Α,Β είναι ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω και

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}\ ,\ P[(A'\cap B)\cup(A\cap B')]=\frac{1}{3}$$

α) Να βρεθεί το άθροισμα $P(A)+P(B)$

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A'\cup B')$

Απάντηση



α) $(A'\cap B)\cap(A\cap B')=\varnothing$, επομένως :

$P[(A'\cap B)\cup(A\cap B')]=1/3\Leftrightarrow P(A'\cap B)+P(A\cap B')=1/3$ **(1)**

Επίσης : $P(A)=P[(A\cap B')\cup(A\cap B)]=$

$=P(A\cap B')+P(A\cap B)$ **(2)**

$P(B)=P[(B\cap A')\cup(A\cap B)]=P(B\cap A')+P(A\cap B)$ **(3)**

(2)+(3) $\Rightarrow P(A)+P(B)=P(A\cap B')+P(B\cap A')+2P(A\cap B)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$P(A)+P(B)=1/3+2[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]\Leftrightarrow$

$P(A)+P(B)=1/3+2[P(A)+P(B)]-2\cdot 1/2\Leftrightarrow P(A)+P(B)=2/3$

β) $P(A'\cup B')=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]=$

$=1-[P(A)+P(B)]+P(A\cup B)=1-2/3+1/2=5/6$

ΘΕΜΑ 33.Α

α) Έστω το σύστημα : $\left.\begin{array}{l}\kappa(\kappa-2)x-(3\lambda+2)(\kappa-1)y=0\\ \kappa(\kappa-2)x+\lambda^2(\kappa-1)y=0\end{array}\right\}$ **(Σ)**

Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in R$ **ώστε το (Σ) να έχει και μη μηδενικές λύσεις.**

β) Επιλέγουμε τυχαία μια τιμή του κ και μια τιμή του λ απ' αυτές που βρέθηκαν στην περίπτωση α) και σχηματίζουμε την εξίσωση της ευθείας (ε) : $y=\kappa x+\lambda$**. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :**

E_1 : « η (ε) διέρχεται από το σημείο M(1,1) »

E_2 : « η (ε) είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1) : $x+2y+1=0$ **»**

Απάντηση

α) Πρέπει $D=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\kappa(\kappa-2) & -(3\lambda+2)(\kappa-1)\\ \kappa(\kappa-2) & \lambda^2(\kappa-1)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)\lambda^2+\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)(3\lambda+2)=0\Leftrightarrow\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)(\lambda^2+3\lambda+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)(\lambda+1)(\lambda+2)=0\ \Leftrightarrow\kappa=0\ ,\ 1\ ,\ 2\quad \lambda=-1\ ,\ -2$

κ \ λ	−1	−2
0	(0,−1)	(0,−2)
1	(1,−1)	(1,−2)
2	(2,−1)	(2,−2)

β) Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος δίνεται από τον διπλανό πίνακα. N(Ω)=6

- Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο M(1,1) όταν: $1=1\cdot\kappa+\lambda\Leftrightarrow\kappa+\lambda=1$, δηλαδή όταν $(\kappa,\lambda)=(2,-1)$, άρα $N(E_1)=1$ και $P(E_1)=\frac{N(E_1)}{N(\Omega)}=\frac{1}{6}$
- Η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην (ε_1) όταν : $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1\Leftrightarrow\kappa\cdot(-1/2)=-1\Leftrightarrow\kappa=2$, δηλαδή όταν $(\kappa,\lambda)=(2,-1)$ ή $(\kappa,\lambda)=(2,-2)$.

Επομένως $N(E_2)=2$ και $P(E_2)=N(E_2)/N(\Omega)=2/6=1/3$.

ΘΕΜΑ 34.Α

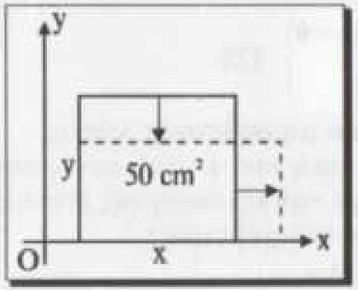
Οι δύο παράλληλες πλευρές ορθογωνίου αυξάνονται με ρυθμό 2cm/sec και οι δύο άλλες ελαττώνονται έτσι, ώστε το σχήμα να παραμένει ορθογώνιο σταθερού εμβαδού $50cm^2$

α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που το μήκος των πλευρών που αυξάνονται είναι :

i) 5cm ii) 10cm

β) Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου όταν η περίμετρος σταματήσει να ελαττώνεται;

Απάντηση



α) Έστω x το μήκος των πλευρών που αυξάνονται και y το μήκος των πλευρών που ελαττώνονται.

Είναι $\Pi=2(x+y)$ **(1)** , $E=xy=50$ **(2)**

$(1)\Rightarrow \frac{d\Pi}{dt}=\frac{d}{dt}[2(x+y)]=2\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}$ **(3)**

$(2)\Rightarrow \frac{d}{dt}(xy)=0\Rightarrow y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}=0$ **(4)**

i) Για x=5 είναι y=10 και $\frac{dx}{dt}=2$. Επομένως η **(4)** δίνει $\frac{dy}{dt}=-4$ και από την **(3)** παίρνουμε : $\frac{d\Pi}{dt}=2\cdot 2+2\cdot(-4)=-4cm/sec$, (δηλαδή η περίμετρος ελαττώνεται).

ii) Για x=10 είναι y=5 και $\frac{dx}{dt}=2$. Επομένως η **(4)** δίνει $\frac{dy}{dt}=-1$ και από την **(3)** παίρνουμε : $\frac{d\Pi}{dt}=2\cdot 2+2\cdot(-1)=2cm/sec$, (δηλαδή η περίμετρος αυξάνεται).

β) Αφού για x=5 η περίμετρος ελαττώνεται και για x=10 αυξάνεται σημαίνει ότι κάποια χρονική στιγμή η περίμετρος σταματάει να ελαττώνεται και αρχίζει να αυξάνεται. Σταματάει να ελαττώνεται όταν $\frac{d\Pi}{dt}=0$ οπότε από την **(3)** παίρνουμε: $\frac{dx}{dt}=-\frac{dy}{dt}=2$ **(5)**.

$(4)\overset{(5)}{\Rightarrow} y\cdot 2+x(-2)=0\Rightarrow y-x=0\Rightarrow y=x$ **(6)**.

$(2)\overset{(6)}{\Rightarrow} x^2=50\Rightarrow x=5\sqrt{2}$. Άρα $x=y=5\sqrt{2}$.

Δηλαδή η ελάττωση της περιμέτρου σταματάει τη στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο πλευράς $5\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ 4η ΔΕΣΜΗ

ΘΕΜΑ 1.Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-x+x\ln x$. Να βρείτε την εξίσω εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που σχη με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$

Λύση

Είναι $f'(x)=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-1+\ln x+x\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\ln x\,,\ x>0$

Αν $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής πρέπει $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\ln x_0=1$

$\sqrt{x_0}+\ln x_0-1=0$ **(1)**

Προφανής ρίζα της **(1)** είναι η $x_0=1$. Η ρίζα αυτή είναι και μοναδική διότ

Αν $x_0>1$ τότε είναι : $\left.\begin{matrix}\sqrt{x_0}>1\\ \ln x_0>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\ln x_0>1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\ln x_0-1>0$

Αν $0<x_0<1$ τότε είναι: $\left.\begin{matrix}\sqrt{x_0}<1\\ \ln x_0<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\ln x_0<1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\ln x_0-1<$

(Η απόδειξη της μοναδικότας της ρίζας $x_0=1$ γίνεται και ως εξής:

Έστω η $g(x)=\sqrt{x}+\ln x-1\,,\ x>0$. Τότε $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in($

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε η ρίζα $x_0=1$ μοναδική.)

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \overset{x_0=1}{\Rightarrow}$

$y-f(1)=1(x-1)\Leftrightarrow y-\left(-\frac{1}{3}\right)=x-1\Leftrightarrow \boxed{y=x-\frac{4}{3}}$

ΘΕΜΑ 2.Δ

α) Να λυθεί η εξίσωση $x+\ln x-1=0$
β) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφ. παράσταση συνάρτησης $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ η οποία να διέρχεται από το σημείο στο οπ κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφ. παράστασης της f τέμνει τον ά $x'x$.

Απόδειξη

α) Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=1$.

Έστω $g(x) = x + \ln x - 1$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x>0$

επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $x+\ln x-1=0$ έχει το $x=1$ μοναδική ρίζα.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$.

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη η οποία τέμνει τον xx' στο σημείο $A(1,0)$.

Για να υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το $A(1,0)$ θα πρέπει να υπάρχει $x_o \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$ της C_f στο $M(x_o, f(x_o))$ να διέρχεται από το $A(1,0)$.

Άρα θα πρέπει η εξίσωση $0 - f(x_o) = f'(x_o)(1 - x_o) \Leftrightarrow -f(x_o) = f'(x_o) - x_o f'(x_o)$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_o}{\ln x_o} = \frac{\ln x_o - 1}{(\ln x_o)^2} - x_o \frac{\ln x_o - 1}{(\ln x_o)^2} \Leftrightarrow -x_o \ln x_o = \ln x_o - 1 - x_o \ln x_o + x_o \Leftrightarrow$$

$x_o + \ln x_o - 1 = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (0,1)\cup(1,+\infty)$, άτοπο διότι μοναδική ρίζα αυτής της εξίσωσης είναι η $x_0=1$.

ΘΕΜΑ 3.Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2x-4)e^x - x^2 + 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x 2(t-1)(e^t-1)}{xe^x} dt$

Απάντηση

α) $f'(x) = 2e^x + (2x-4)e^x - 2x + 2 = e^x(2 + 2x - 4) - 2x + 2 = e^x(2x-2) - (2x-2)$

$= (2x-2)(e^x - 1) = 2(x-1)(e^x-1)$

Το πρόσημο της f', τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x		0		1	
$x-1$	−		−	0	+
e^x-1	−	0	+		+
f'	+	0	−	0	+
f	↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$

Στη θέση $x=0$ η f έχει τοπ. μέγιστο το $f(0)=0$ και στη θέση $x=1$ τοπ. ελαχιστο το $f(1)=-2e+5$.

β) Έχουμε ότι $\int_0^x 2(t-1)(e^t-1)dt = \int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) =$
$=(2x-4)e^x - x^2 + 2x + 4$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x 2(t-1)(e^t-1)}{xe^x} dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-4)e^x - x^2 + 2x + 4}{xe^x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-4}{x} - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + \frac{4}{xe^x}\right) = 2$. Διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x} = 2$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x} = 0$.

ΘΕΜΑ 4.Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(1)=0$.

Αν $g(x) = 1 + \int_0^x (t-2)f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2) : g''(\xi) = 0$.

Απόδειξη

Είναι $g'(x) = (x-2)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{matrix} g'(2) = 0 \\ g'(1) = -1f(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g'(1) = g'(2)$

Επειδή η f ειναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Άρα ισχύει το θεώρημα του *ROLLE* για την $g'(x)$ στο διάστημα $[1,2$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (1,2) : g''(\xi) = 0$

ΘΕΜΑ 5.Δ

Δίνονται οι $f(x) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)x^3 + 2(\alpha+2)x^2 + 5x - 4$, $g(x) = 5x^2 + 3x - 8$

α) Να βρείτε το α ώστε η f να έχει σημείο καμπής το $x_0= -2$

β) Να δείξετε ότι η C_g διέρχεται από το σημείο καμπής της C_f

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην εφαπτομέν της C_g στο σημείο καμπής της C_f

Απάντηση

α) Για να έχει η C_f σημείο καμπής στη θέση $x_0= -2$ αρκεί $f''(-2) = 0$ **(1)** και η $f''(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του από το -2.

$f'(x) = 3\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)x^2 + 4(\alpha+2)x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x)=6\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x+4(\alpha+2)\ ,\ x\in R \qquad f''(-2)=-12\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+4(\alpha+2)=$

$=-12\alpha+6+4\alpha+8=-8\alpha+14$

$f''(-2)=0\Leftrightarrow -8\alpha+4=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=\frac{7}{4}}$

Για $\alpha=\frac{7}{4}$ έχουμε $f''(x)=\frac{15}{2}(x+2)$ οπότε $f''(x)>0$ για $x>-2$ και

$f''(x)<0$ για $x<-2$. Δηλαδή η f'' αλλάζει πρόσημο στο -2.

Άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $(-2,f(-2))$.

Για $\alpha=\frac{7}{4}$ η f γίνεται $f(x)=\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{2}x^2+5x-4$ οπότε f(-2)=...=6

Άρα το σημείο καμπής είναι (-2,f(-2))=(-2,6)

β) Επειδή $g(-2)=5(-2)^2+3(-2)=20-6-8=6$ η C_g διέρχεται από το σ.κ. της C_f.

γ) $g'(x)=10x+3$ άρα $g'(-2)=-20+3=-17$

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0=-2$ είναι η

ε: $y-g(-2)=g'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-6=-17(x+2)\Leftrightarrow y=-17x-28$ με σ.δ. λ=-17

Άρα η κάθετη στην (ε) έχει εξίσωση : $y-6=\frac{1}{17}(x+2)\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{17}x+\frac{104}{17}}$

ΘΕΜΑ 6.Δ

Δίνονται οι f,g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R για τις οποίες ισχύει:

$g''(x)=f'(x)e^x-3xf''(x)\ ,\ x\in R$ **(1) και** $g'(1)=f'(1)=f(1)=1\ ,\ g'(0)=f(0)=0$

Να υπολογίσετε το $\int_0^1 e^x f(x)dx$

Απάντηση

Από (1) $\Rightarrow \int_0^1 g''(x)dx=\int_0^1 f'(x)e^x dx-3\int_0^1 xf''(x)dx\Leftrightarrow$

$[g'(x)]_0^1=\left[f(x)e^x\right]_0^1-\int_0^1\left(e^x\right)'f(x)dx-3[xf'(x)]_0^1+3\int_0^1(x)'f'(x)dx\Leftrightarrow$

$g'(1)-g'(0)=f(1)e-f(0)-\int_0^1 e^x f(x)dx-3f'(1)+3\int_0^1 f'(x)dx\Leftrightarrow$

$1=e-\int_0^1 e^x f(x)dx-3+3[f(x)]_0^1\Leftrightarrow 1=e-\int_0^1 e^x f(x)dx-3+3f(1)-3f(0)\Leftrightarrow$

$1=e-\int_0^1 e^x f(x)dx-3+3\Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 e^x f(x)dx=e-1}$

ΘΕΜΑ 7.Δ

Βιοτεχνία παράγει x μονάδες ενός προϊόντος ημερησίως τις οποίε πουλάει με την τιμή T(x)=3000-2x δρχ./μονάδα. Το ημερήσιο κόστο παραγωγής είναι K(x)=2200x+20000 δρχ. και η παραγωγή δεν μπορεί ν ξεπεράσει τις 300 μονάδες την ημέρα.

Λόγω ανταγωνισμού, η βιοτεχνία αναγκάζεται να κάνει διαφημιστικ καμπάνια για το προϊόν, η οποία της κοστίζει x+20 δρχ./μονάδ προϊόντος την ημέρα.

α) Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής πριν και μετά τη διαφημιστικ καμπάνια, που κάνει το κέδρος της βιοτεχνίας μέγιστο.

β) Ποια η επίπτωση της διαφημιστικής καμπάνιας της βιοτεχνίας:

i) Στον καταναλωτή του προϊόντος .

ii) Στα κέρδη της βιοτεχνίας.

Απάντηση

α) $P(x)=E(x)-K(x)$, όπου P το κέρδος E τα έσοδα και K το κόστο παραγωγής.

$P(x)=(3000-2x)x-(2200x+20000)=$

$=3000x-2x^2-2200x-20000=$

$=-2x^2+800x-20000$

$P'(x)=-4x+800$

$P'(x)=0\Leftrightarrow -4x+800=0\Leftrightarrow \boxed{x=200}$

P_{max}=P(200)=60000 δρ./ημέρα

x	0	200	300
P'	+	0	-
P	↗		↘

(Πίνακας 1)

Η μονοτονία της P φαίνεται στον πίνακα 1 .

Μετά τη διαφημιστική καμπάνια έχουμε:

$P(x)=E(x)-K(x)-\Delta(x)$ όπου $\Delta(x)=(x+20)x$ το διαφημιστικό κόστος.

$P(x)=(3000-2x)x-(2200x+20000)-x(x+20)=$

$=-3x^2+780x-20000$

$P'(x)=-6x+780 \qquad P'(x)=0\Leftrightarrow x=130$

x	0	130	300
P'	+	0	-
P	↗		↘

(Πίνακας 2)

Η μονοτονία της P φαίνεται στον πίνακα 2.

P_{max}=P(130)=30700 δρ./ημέρα

β) i) Τιμή προϊόντος πριν την καμπάνια:

$T(200)=3000-2\cdot 200=2600$ δρχ.

Τιμή προϊόντος μετά τήν καμπάνια:

$T(130)=3000-2\cdot 130=2740$ δρχ.

Άρα για τον καταναλωτή αυξάνεται η τιμή του προϊόντος κατά 140 δρχ.

ii) Τα κέρδη της εταιρείας μειώνονται κατά 60000-30700=29300 δρχ./ημέρα

ΘΕΜΑ 8.Δ

Δίνεται η $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

α) Να βρείτε τις $f'(x)$, $f''(x)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$

γ) Να δείξετε ότι: $f''(1)=\frac{3}{2}f'(1)$

Απάντηση

α) Έστω $F(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ τότε $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (1)

$$\blacktriangleright\ f'(x)=\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\right)'=\left(\int_{x^2}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+\int_{\alpha}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\right)'=$$

$$=\left(\int_{\alpha}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt-\int_{\alpha}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\right)'=\left[F(x^3)-F(x^2)\right]'=F'(x^3)\cdot 3x^2-F'(x^2)\cdot 2x=$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}3x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}2x=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\blacktriangleright\ f''(x)=\left(\frac{-2x}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}\right)'=\left(\frac{-2x}{\sqrt{1+x^4}}\right)'+\left(\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}\right)'=$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+x^4}+2x\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}+\frac{6x\sqrt{1+x^6}-3x^2\frac{6x^5}{2\sqrt{1+x^6}}}{1+x^6}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+x^4}+\frac{4x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}+\frac{6x\sqrt{1+x^6}-\frac{9x^7}{\sqrt{1+x^6}}}{1+x^6}=$$

$$=\frac{-2(1+x^4)+4x^4}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}+\frac{6x(1+x^6)-9x^7}{(1+x^6)\sqrt{1+x^6}}=\frac{2x^4-2}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}+\frac{6x-3x^7}{(1+x^6)\sqrt{1+x^6}}$$

β) $f(1)=\int_1^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=0$, $f'(1)=-\frac{2}{\sqrt2}+\frac{3}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι η $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt2}{2}(x-1)\Leftrightarrow\ y=\frac{\sqrt2}{2}x-\frac{\sqrt2}{2}$

γ) $f''(1)=\frac{3}{2\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{2\cdot2}=\frac{3}{2}f'(1)$

ΘΕΜΑ 9.Δ

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$

α) Να δείξετε ότι: $A^3+3A^2+3A=-I$ (1)

β) Να υπολογιστεί ο πίνακας: $(A+2I)^{-1}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες υπά[…] πίνακας

$X=\begin{bmatrix}x\\y\\\omega\end{bmatrix}\neq 0$ τέτοιος ώστε: $AX=-\lambda^2X$

ii) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε να προσδιορισθού[…] πίνακες X

Απάντηση

α) Η (1) $\Leftrightarrow A^3+3A^2I+3AI^2+I^3=0\Leftrightarrow(A+I)^3=0$

Είναι: $A+I=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$ οπότε $(A+I)^3=...=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

β) Θέτω $A+2I=B$ (2) και αναζητώ τον B^{-1}.
Η (2) $\Leftrightarrow A=B-2I$ αντικαθιστώ στην (1) και έχω:

$(B-2I)^3+3(B-2I)^2+3(B-2I)=-I\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B^3-6B^2I+6BI^2-8I^3+3B^2-6BI+12I^2+3B-6I+I=0$

$\Leftrightarrow B^3-3B^2I+3BI=I\Leftrightarrow B(B^2-3B+3I)=I\Leftrightarrow B^{-1}=B^2-3B+3I$ δη[…]

$$(A+2I)^{-1}=(A+2I)^2-3(A+2I)+3I=...=A^2+A+I=...=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

γ) i) $AX=-\lambda^2X\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\\omega\end{bmatrix}=-\lambda^2\begin{bmatrix}x\\y\\\omega\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-x+y+\omega\\x-y\\-x-\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda^2x\\-\lambda^2y\\-\lambda^2\omega\end{bmatrix}$ […]

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\lambda^2-1)x + y + \omega = 0\\ x+(\lambda^2-1)y = 0\\ -x + (\lambda^2-1)\omega = 0\end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Για να έχει το **(Σ)** και μη μηδενικές λύσεις αφού $X \neq 0$ πρέπει και αρκεί :

$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda^2-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=0 \overset{\Sigma_3-\Sigma_2}{\Leftrightarrow} D=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda^2-1 & 1-\lambda^2\\ -1 & 0 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=0 \overset{\Gamma_2+\Gamma_3}{\Leftrightarrow}$$

$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda^2-1 & 1-\lambda^2\\ 0 & \lambda^2-1 & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & 1\\ 0 & \lambda^2-1\end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2-1)^2=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^3=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=\pm 1}$$

γ) ii) Για $\lambda=-1$ το σύστημα **(Σ)** γίνεται :

$$\left.\begin{array}{l}0x+y+\omega=0\\ x+0y=0\\ -x+0\omega=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=-\omega\end{array}\right\} \text{ οπότε } X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega\\ \omega\end{bmatrix}=\omega\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}, \omega \in R$$

ΘΕΜΑ 10.Δ **(Προτεινόμενο)**

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ **και η συνάρτηση** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

α) Να βρείτε το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{23}

β) Να βρείτε το $l=\lim\limits_{x\to A_{23}} f(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $4l\omega^2-90\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right)^2\omega+25=0$ **,** $\omega \in R$

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{|x-5|}$

ΘΕΜΑ 11.Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2-3x}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}$ **και** $g(x)=\left(\kappa+\dfrac{\lambda-1}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

α) Να βρείτε τα $\kappa,\lambda \in R$ **ώστε η g να είναι παράγουσα της f στο** R^***.**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f **τ**

$x'x$ **και τις ευθείες** $x=1$**,** $x=2$**.**

Απάντηση

α) $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R^*$ **(1)**

$$g'(x)=\left(\kappa+\frac{\lambda-1}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}}+\left(e^{-\frac{2}{x}}\right)'\left(\kappa+\frac{\lambda-1}{x}\right)=$$

$$-\frac{\lambda-1}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{\kappa x+\lambda-1}{x}\right)=-\frac{\lambda-1}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2\kappa x+2\lambda-2}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}=$$

$$\frac{-\lambda x+x+2\kappa x+2\lambda-2}{x^3}\cdot e^{-\frac{2}{x}}=\frac{x(-\lambda+1+2\kappa)+2\lambda-2}{x^3}\cdot e^{-\frac{2}{x}}$$

Άρα $(1)\Rightarrow \dfrac{x(-\lambda+1+2\kappa)+2\lambda-2}{x^3}\cdot e^{-\frac{2}{x}}=\dfrac{2-3x}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}$ $\overset{(x\in R^*,\ e^{-\frac{2}{x}}>0)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow x(-\lambda+1+2\kappa)+2\lambda-2=-3x+2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-\lambda+1+2\kappa=-3\\ 2\lambda-2=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\kappa=-1\\ \lambda=2\end{array}}$$

άρα $g(x)=\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-2/x}$

β) f συνεχής στο $[1,2]$ σαν γινόμενο συνεχών.

$1\le x\le 2 \Rightarrow -3\ge -3x\ge -6 \Rightarrow 2-3\ge 2-3x\ge 2-6 \Rightarrow -4\le 2-3x\le -1$,

$x^3>0$, $e^{-\frac{2}{x}}>0$ άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. $E=-\int_1^2 f(x)dx=$

$$=-\int_1^2 g'(x)dx=-[g(x)]_1^2=-g(2)+g(1)=-\left(-1+\frac{1}{2}\right)e^{-1}+(-1+1)e^{-2}=\frac{1}{2e}$$

ΘΕΜΑ 12.Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ **παραγωγίσιμη για την οποία ισχύου**

f(0)=0 και $f'(x)=\dfrac{x^4+1}{x^4+x^2+2}$ **για κάθε** $x\in R$**. Να δείξετε ότι για κάθε**

x>0 ισχύει $0<f(x)<x$ **.**

Απάντηση

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$

Έστω $g(x)=f(x)-x$, g παραγωγίσιμη στο R.

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{x^4+1}{x^4+x^2+2}-1=\frac{x^4+1-x^4-x^2-2}{x^4+x^2+2}=\frac{-x^2-1}{x^4+x^2+2}=$$

$=-\frac{x^2+1}{x^4+x^2+2}<0$ άρα g γνησίως φθίνουσα για κάθε $x>0$, επομένως $g(x)<g(0) \Rightarrow f(x)-x<0 \Rightarrow f(x)<x$. Άρα $0<f(x)<x$

ΘΕΜΑ 13.Δ √

Θεωρούμε το σύστημα :

$$\left.\begin{aligned}(\eta\mu\theta)\,\chi+(\sigma\upsilon\nu\theta)\psi+\theta^2\omega&=0\\(\eta\mu\theta)\,\chi+(\sigma\upsilon\nu\theta)\psi-2\omega&=0\\(\sigma\upsilon\nu\theta)\,\chi-(\eta\mu\theta)\psi-2\theta\omega&=1\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $\theta\in R$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την (χ_0,ψ_0,ω_0)

Β. Αν $A(\theta)=\begin{bmatrix}\chi_0 & \psi_0\\ -\psi_0 & -\chi_0\end{bmatrix}$, $B(\theta)=\begin{bmatrix}\chi_0 & \omega_0\\ -\omega_0 & -\chi_0\end{bmatrix}$, $\Gamma(\theta)=\begin{bmatrix}\psi_0 & \omega_0\\ -\omega_0 & -\psi_0\end{bmatrix}$

να δείξετε ότι: α) $A^2(\theta)=0 \Leftrightarrow \theta=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$ **β)** $B^2(\theta)+\Gamma^2(\theta)=I_2$

Απάντηση

Α) Η ορίζουσα του (Σ) είναι $D=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & \theta^2\\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & -2\\ \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta & -2\theta\end{vmatrix}=$

$=\theta^2(-\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta)+2(-\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta)-2\theta(\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)=$

$-\theta^2-2<0$. Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & \sigma\upsilon\nu\theta & \theta^2\\ 0 & \sigma\upsilon\nu\theta & -2\\ 1 & -\eta\mu\theta & -2\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & \theta^2\\ \sigma\upsilon\nu\theta & -2\end{vmatrix}=-2\sigma\upsilon\nu\theta-\theta^2\sigma\upsilon\nu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta(\theta^2+2)$$

$$D_\psi=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & 0 & \theta^2\\ \eta\mu\theta & 0 & -2\\ \sigma\upsilon\nu\theta & 1 & -2\theta\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & \theta^2\\ \eta\mu\theta & -2\end{vmatrix}=-(-2\eta\mu\theta-\theta^2\eta\mu\theta)=\eta\mu\theta(\theta^2+2)$$

$$D_\omega=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta\\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta\end{vmatrix}=0.$$

Άρα $\chi_0=\frac{D_\chi}{D}=\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta(\theta^2+2)}{-(\theta^2+2)}=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\psi_0=\frac{D_\psi}{D}=\frac{\eta\mu\theta(\theta^2+2)}{-(\theta^2+2)}=-\eta\mu\theta$,

$\omega_0=\frac{D_\omega}{D}=0$

Β. α) $A^2(\theta)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta\\ \eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta\\ \eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta & 0\\ 0 & \sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\theta=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\theta=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}}\ \kappa\in Z$

β) $B^2(\theta)+\Gamma^2(\theta)=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ 0 & -\sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ 0 & -\sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}+$

$+\begin{bmatrix}-\eta\mu\theta & 0\\ 0 & \eta\mu\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\eta\mu\theta & 0\\ 0 & \eta\mu\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu^2\theta & 0\\ 0 & \sigma\upsilon\nu^2\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta\mu^2\theta & 0\\ 0 & \eta\mu^2\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta & 0\\ 0 & \sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

ΘΕΜΑ 14.Δ

Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα του πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω .

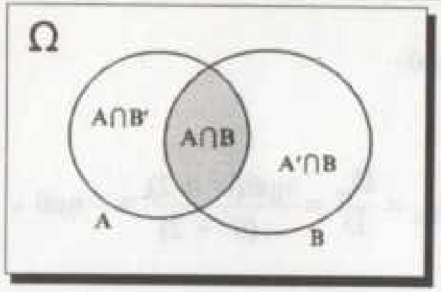
α) Να δειχθεί με τη βοήθεια διαγράμματος Venn ότι:

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

β) Επιλέγουμε στην τύχη έναν από τους αριθμούς 1,2,3,...,100. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχόμενου

Ε: «Ο αριθμός διαιρείται μόνο με έναν από τους αριθμούς 4 και 25»

Απάντηση



α) $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,
$(A\cap B')\cap(A\cap B)=\varnothing$ άρα
$P(A)=P(A\cap B')+P(A\cap B) \Rightarrow$
$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

β) $\Omega=\{1,2,3,...,100\}$, $N(\Omega)=100$
Έστω τα ενδεχόμενα:
A: « Ο αριθμός διαιρείται με 4» ,
B: « Ο αριθμός διαιρείται με 25» $E=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$
$A=\{4,8,12,16,...,100\} \Rightarrow N(A)=25$, $B=\{25,50,75,100\} \Rightarrow N(B)=4$,
$(A\cap B)=\{100\} \Rightarrow N(A\cap B)=1$. Άρα $P(A)=25/100$, $P(B)=4/100$,
$P(A\cap B)=1/100$. $P(A\cap B')\overset{(\alpha)}{=}P(A)-P(A\cap B)=25/100-1/100$ και
$P(A'\cap B)\overset{(\alpha)}{=}P(B)-P(A\cap B)=4/100-1/100$. Άρα: *(αφού $(A\cap B')\cap(A'\cap B)=\varnothing$)*
$P(E)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=\frac{25}{100}-\frac{1}{100}+\frac{4}{100}-\frac{1}{100}=\frac{27}{100}$

ΘΕΜΑ 15.Δ

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_7\}$ που περιέχει *μη-ισοπίθανα* στοιχειώδη ενδεχόμενα $\omega_1,\omega_2,...,\omega_7$.
Αν οι $P(\omega_1),P(\omega_2),...,P(\omega_7)$ αποτελούν *(κατά τη σειρά αυτή)* διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και οι $P(\omega_1),P(\omega_3),P(\omega_6)$ αποτελούν *(κατά τη σειρά αυτή)* διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου να βρεθούν:
α) Οι $P(\omega_1),P(\omega_7)$ β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$

Απάντηση

α) $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_7)=1$ **(1)** $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$,..., $P(\omega_7)$ αρ. πρ. $\Rightarrow$
$P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_7)=[2P(\omega_1)+6\omega]\,7/2=7[P(\omega_1)+3\omega]$ **(2)** *(όπου ω η διαφορά της α.π.)*. **(1),(2)**$\Rightarrow$ $7[P(\omega_1)+3\omega]=1$ **(3)**
$P(\omega_1)$, $P(\omega_3)$, $P(\omega_6)$ διαδ. όροι γ.π. $\Rightarrow$ $P^2(\omega_3)=P(\omega_1)P(\omega_6)$ **(4)**.
Αλλά $P(\omega_3)=P(\omega_1)+2\omega$ και $P(\omega_6)=P(\omega_1)+5\omega$ οπότε η **(4)** γίνεται:
$[P(\omega_1)+2\omega]^2=P(\omega_1)[P(\omega_1)+5\omega] \Rightarrow 4\omega^2-P(\omega_1)\omega=0 \Rightarrow \omega[4\omega-P(\omega_1)]=0$ **(5)**
Αλλά $\omega\neq0$ διότι αλλιώς θα ήταν $P(\omega_1)=P(\omega_2)=...=P(\omega_7)$ και τα $\omega_1,\omega_2,...,\omega_7$ ισοπίθανα, άτοπο. Επομένως **(5)** $\Rightarrow$ $P(\omega_1)=4\omega$ **(6)** και **(3)** $\Rightarrow$ $\omega=1/49$ και από **(6)** $\Rightarrow$ $\mathbf{P(\omega_1)=4/49}$. $P(\omega_7)=P(\omega_1)+6\omega=4/49+6/49 \Rightarrow$ $\mathbf{P(\omega_7)=10/49}$.

β) $P(\omega_2)=P(\omega_1)+\omega=5/49$, $P(\omega_4)=P(\omega_1)+3\omega=7/49$, $P(\omega_6)=P(\omega_1)+5\omega=9/49$
Άρα $P(A)=P(\omega_2)+P(\omega_4)+P(\omega_6)=5/49+7/49+9/49 \Rightarrow$ $\mathbf{P(A)=21/49}$

ΘΕΜΑ 16.Δ

Έστω A ένα ενδεχόμενο του πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω $\lambda\in R$ τέτοιο ώστε :

$$|P(A)-3|-|3P(A)+2|=4\lambda+5$$

α) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή α και η μέγιστη τιμή β του λ.
β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\int_\alpha^\beta(2x+5)^2(x+2)^7dx$

Απάντηση

α) Είναι $P(A)-3<0$, αφού $0\le P(A)\le1$ και $3P(A)+2>0$
Άρα : $-P(A)+3-3P(A)-2=4\lambda+5 \Leftrightarrow -4P(A)+1=4\lambda+5 \Leftrightarrow P(A)=-\lambda-$
Επομένως : $0\le-\lambda-1\le1 \Leftrightarrow 1\le-\lambda\le2 \Leftrightarrow -2\le\lambda\le-1$

$$\lambda_{min}=\alpha=-2\ ,\ \lambda_{max}=\beta=-1$$

β) Θέτω $x+2=u \Rightarrow 2x+4=2u \Rightarrow 2x+5=2u+1$, $dx=du$.
για $x=-2\Rightarrow u=0$, $x=-1\Rightarrow u=1$, άρα $I=\int_{-2}^{-1}(2x+5)^2(x+2)^7dx=\int_0^1(2u+1)^2u^7du=$
$=\int_0^1(4u^9+4u^8+u^7)du=\left[4\frac{u^{10}}{10}+4\frac{u^9}{9}+\frac{u^8}{8}\right]_0^1=\frac{4}{10}+\frac{4}{9}+\frac{1}{8}=\frac{349}{360}$

ΘΕΜΑ 17.Δ

α) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g περιττή επιπλέον $f(x)+g(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$, να προσδιορίσετε τους τύπ των f και g.
β) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις f και g.
γ) Αν E(λ) το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g τις ευθείες x=0 και x=λ , λ>0 , να βρείτε το $\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

Απάντηση

α) Είναι $f(x)+g(x)=e^x$ **(1)** για κάθε $x\in R$. Θέτω $-x$ στη θέση το και έχω : $f(-x)+g(-x)=e^{-x}$. Επειδή f άρτια και g περιττή είν $f(x)-g(x)=e^{-x}$ **(2)**. Λύνοντας το σύστημα των **(1),(2)** ως προς f(x) , g
έχουμε : $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in R$.

β) $g'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ για κάθε $x\in R$, επομένως η g είναι γνησ αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=e^{-x} \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0.$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>e^{-x} \Leftrightarrow x>-x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x>0.$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και στη θέση x=0 έχει ελάχιστο το f(0)=1.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\lambda}\left|e^{-x}\right|dx \overset{(e^{-x}>0)}{=} \int_0^{\lambda}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}=-e^{-\lambda}+e^0=1-\frac{1}{e^{\lambda}}$$

Επομένως $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^{\lambda}}\right)=1.$

ΘΕΜΑ 18.Δ

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & x\in[0,1]\\ \alpha(x^2-1)+\beta(x-1)+2, & x>1\end{cases}$ **,** $\alpha,\beta\in R$

α) Είναι η f ολοκληρώσιμη στο R_+**;**

β) Να βρείτε σχέση που συνδέει τα α και β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x=1 και ότι $\alpha=-1$**. Υπο-λογίστε** $x_0\in[1,+\infty)$ **ώστε** $f(x_0)=0$ **και το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη** C_f**, τον άξονα xx' και τις ευθείες x=0 και** $x=x_0$**.**

Απάντηση

α) Για να είναι μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη αρκεί να είναι συνεχής.

Είναι: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(2\sqrt{x}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\alpha\left(x^2-1\right)+\beta(x-1)+2\right]=2$

και $f(1)=2\sqrt{1}=2$. Άρα η f είναι συνεχής στο 1.

Στο $[0,1)$ η $f(x)=2\sqrt{x}$ είναι συνεχής και στο $(1,+\infty)$ η $f(x)=\alpha\left(x^2-1\right)+\beta(x-1)+2$ επίσης συνεχής. Άρα η f συνεχής στο $[0,+\infty)$. Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη.

β) Στο σημείο x=1 η f αλλάζει τύπο.

▸ Για x<1 είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{2\sqrt{x}-2\sqrt{1}}{x-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$\dfrac{2(x-1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x-1)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{2}{2}=1.$

▸ Για x>1 είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\alpha\left(x^2-1\right)+\beta(x-1)+2-2}{x-1}=\alpha(x+1)+\beta$ οπότ

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\alpha+\beta.$

Επομένως για να είναι η f παραγωγίσιμη στο x=1 πρέπει 2α+β=1.

γ) Αφού $\alpha=-1$ και f παραγωγίσιμη στο x=1, δηλαδή 2α+β
έχουμε

$-2+\beta=1 \Rightarrow \beta=3$, άρα η συνάρτηση γίνεται:

$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & x\in[0,1]\\ -\left(x^2-1\right)+3(x-1)+2, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & x\in[0,1]\\ -x^2+3x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Θέλουμε $\left.\begin{matrix}f(x_0)=0\\ x_0\ge1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}-x_0^2+3x_0=0\\ x_0\ge1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x_0=3 \text{ η } x_0=0\\ x_0\ge1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x_0=3$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_0^3|f(x)|dx=\int_0^1|f(x)|dx+\int_1^3|f(x)|dx=\int_0^1\left|2\sqrt{x}\right|dx+\int_1^3\left|-x^2+3x\right|dx=$$

$$=\int_0^1 2\sqrt{x}dx+\int_1^3\left|-x^2+3x\right|dx.$$

Αλλά $-x^2+3x=x(-x+3)$ και από τον διπλανό πίνακα προσήμων προκύπτει ότι:

$-x^2+3x>0$ για κάθε $x\in[1,3]$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-x^2+3x$	-	0	+	0	-

Επομένως $E=\int_0^1 2\sqrt{x}dx+\int_1^3\left(-x^2+3x\right)dx=2\left[\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1+\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}\right]_1^3=$

$$=\frac{4}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^3=\frac{4}{3}+\left(-9+\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{14}{3}.$$

ΘΕΜΑ 19.Δ

Θεωρούμε την καμπύλη (c) $(x-1)^2+(y+4)^2=\lambda^2+8y+16$ και την ευθεία (ε) $y=x-\lambda$, $\lambda>0$.

α) Να δείξετε ότι η καμπύλη (c) παριστάνει πάντα κύκλο.

β) Να βρεθεί ο λ ώστε η ευθεία (ε) να περνάει από το κέντρο του κύκλου (c).

γ) Για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε) είναι :

i) τέμνουσα του κύκλου (c) ii) εφαπτόμενη του κύκλου ©

Απάντηση

α) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$(x-1)^2+y^2+8y+16=\lambda^2+8y+16 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=\lambda^2$ άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=\lambda>0$.

β) Για να περνάει η ευθεία **(ε)** από το $K(1,0)$ πρέπει $0=1-\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda=1}$

γ) i) Για να είναι η ευθεία **(ε)** τέμνουσα του κύκλου **(c)** πρέπει το

σύστημα: $\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+y^2=\lambda^2\\ y=x-\lambda\end{array}\right\}$ **(Σ)** να έχει δύο λύσεις.

Για να συμβαίνει αυτό αρκεί η εξίσωση $(x-1)^2+(x-\lambda)^2=\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2-2\lambda x+\lambda^2=\lambda^2 \Leftrightarrow 2x^2-2(\lambda+1)x+1=0$ να έχει δύο ρίζες άνισες. Άρα αρκεί $\Delta>0 \Leftrightarrow 4(\lambda+1)^2-8>0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2-2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\lambda+1-\sqrt{2}\right)\left(\lambda+1+\sqrt{2}\right)>0 \Leftrightarrow \lambda\in\left(-\infty,\ -1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},\ +\infty\right)$ και επειδή από υπόθεση $\lambda>0$, είναι $\boxed{\lambda\in\left(-1+\sqrt{2},\ +\infty\right)}$

ii) Για να είναι η ευθεία **(ε)** εφαπτόμενη του κύκλου **(c)** πρέπει το **(Σ)** να έχει μοναδική λύση.

Για να συμβαίνει αυτό αρκεί η εξίσωση : $2x^2-2(\lambda+1)x+1=0$ να έχει διπλή ρίζα. Άρα αρκεί $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda=-1\pm\sqrt{2}$, και επειδή από υπόθεση είναι $\lambda>0$, είναι $\boxed{\lambda=-1+\sqrt{2}}$

ΘΕΜΑ 20.Δ

Έστω A πίνακας 2x2 και ρ_1, ρ_2 ρίζες της εξίσωσης : $|A-xI|=0$, $x\in$

α) Δείξτε ότι : $\rho_1\rho_2=|A|$

β) Δείξτε ότι : $(A-\rho_1I)(A-\rho_2I)=0$, I ο μοναδιαίος πίνακας 2x2

Απάντηση

α) Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}$ τότε $A-xI=\begin{bmatrix}\alpha-x&\beta\\ \gamma&\delta-x\end{bmatrix}\Rightarrow|A-xI|=\begin{vmatrix}\alpha-x&\beta\\ \gamma&\delta-x\end{vmatrix}$

$=(\alpha-x)(\delta-x)-\beta\gamma=\alpha\delta-\alpha x-\delta x+x^2-\beta\gamma=x^2-(\alpha+\delta)x+|A|$

Άρα $|A-xI|=0\Leftrightarrow x^2-(\alpha+\delta)x+|A|=0$ **(1)**

και αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της **(1)** θα είναι $\rho_1\rho_2=\frac{|A|}{1}=|A|$

β)

$$\left.\begin{array}{c}(A-\rho_1I)(A-\rho_2I)=A^2-A\rho_2I-A\rho_1I+\rho_1\rho_2I^2=A^2-(\rho_1+\rho_2)A+\rho_1\rho_2I\\ \rho_1\rho_2=|A|,\ \rho_1+\rho_2=-\frac{-(\alpha+\delta)}{1}=\alpha+\delta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow(A-\rho_1I)(A-\rho_2I)=A^2-(\alpha+\delta)A+|A|I$ **(2)**

$$A^2-(\alpha+\delta)A+|A|I=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}-(\alpha+\delta)\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}+(\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha^2+\beta\gamma&\alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma^2&\beta\gamma+\delta^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha^2+\alpha\delta&\alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta&\alpha\delta+\delta^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma&0\\0&\alpha\delta-\beta\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$$

Άρα η **(2)** γίνεται $(A-\rho_1I)(A-\rho_2I)=0$

ΘΕΜΑ 21.Δ

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0&\eta\mu\theta&0\\ \eta\mu\theta&0&1\\ 1&1&0\end{bmatrix}$, $\theta\in R$

α) Δείξτε ότι : $A^3-\left(\eta\mu^2\theta+1\right)A-\eta\mu\theta\, I=0$ (1)

β) Εξετάστε αν για τις διάφορες τιμές του πραγματικού θ ορίζεται αντίστροφος του A.

Απάντηση

α) $A^2=\begin{bmatrix}0 & \eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & \eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\mu^2\theta & 0 & \eta\mu\theta\\ 1 & \eta\mu^2\theta+1 & 0\\ \eta\mu\theta & \eta\mu\theta & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$A^3=\begin{bmatrix}\eta\mu^2\theta & 0 & \eta\mu\theta\\ 1 & \eta\mu^2\theta+1 & 0\\ \eta\mu\theta & \eta\mu\theta & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & \eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\mu\theta & \eta\mu^3\theta+\eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu^3\theta+\eta\mu\theta & \eta\mu\theta & \eta\mu^2\theta+1\\ \eta\mu^2\theta+1 & \eta\mu^2\theta+1 & \eta\mu\theta\end{bmatrix}$$

$$A^3-(\eta\mu^2\theta+1)A-\eta\mu\theta\cdot I=\begin{bmatrix}\eta\mu\theta & \eta\mu^3\theta+\eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu^3\theta+\eta\mu\theta & \eta\mu\theta & \eta\mu^2\theta+1\\ \eta\mu^2\theta+1 & \eta\mu^2\theta+1 & \eta\mu\theta\end{bmatrix}-$$

$$-(\eta\mu^2\theta+1)\begin{bmatrix}0 & \eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}-\eta\mu\theta\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

β)

- Εάν $\eta\mu\theta\neq 0\Rightarrow\theta\neq\kappa\pi$, $\kappa\in Z$

(1) $\Rightarrow\frac{1}{\eta\mu\theta}A^3-\frac{\eta\mu^2\theta+1}{\eta\mu\theta}A=I\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}A^2-\frac{\eta\mu^2\theta+1}{\eta\mu\theta}\cdot I\right)=I$, δηλαδή

ο A αντιστρέφεται και $A^{-1}=\frac{1}{\eta\mu\theta}A^2-\frac{\eta\mu^2\theta+1}{\eta\mu\theta}\cdot I$

- Εάν $\eta\mu\theta=0\Rightarrow\theta=\kappa\pi$, $\kappa\in Z$

(1) $\Rightarrow A^3-A=0\Leftrightarrow A^3=A$, οπότε αν υπάρχει αντ/φος του A θα είναι

$A^3A^{-1}=AA^{-1}\Leftrightarrow A^2=I$ άτοπο αφού $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\neq I$

ΘΕΜΑ 22.Δ

Εάν A τετραγωνικός νxν πίνακας τέτοιος ώστε : $A^5+A^{10}+I_\nu=0$ (1)
να αποδείξετε ότι :

α) Ο A αντιστρέφεται και είναι $A^{-1}=A^{14}$

β) $(A^{-1})^5+(A^{-1})^{10}=-I_\nu$

Απάντηση

α) Έστω πίνακας $B=A^5$, **(1)** $\Rightarrow B+B^2+I_\nu=0\Leftrightarrow B^2=-B-I_\nu\Leftrightarrow$ *(πολ*
με B) $B^3=-B^2-B\Leftrightarrow B^3=B+I_\nu-B\Leftrightarrow B^3=I_\nu\Leftrightarrow A^{15}=I_\nu\Leftrightarrow A\cdot A^{14}=I_\nu$.

Άρα $A^{-1}=A^{14}$

β) $(A^{-1})^5+(A^{-1})^{10}=A^{70}+A^{140}=A^{15\cdot4+10}+A^{15\cdot9+5}=(A^{15})^4\cdot A^{10}+(A^{15})^9\cdot A^5$

$=I^4A^{10}+I^9A^5=A^{10}+A^5\overset{(1)}{=}-I_\nu$

ΘΕΜΑ 23.Δ

Έστω A,B τετραγωνικοί νxν πίνακες τέτοιοι ώστε :

$$(\lambda^2+\lambda^4)\cdot B=2A \quad (1) \quad , \quad 2(\lambda\cdot B+A)=-B \quad (2) \quad , \quad \lambda\in R$$

Να εξετάσετε αν οι πίνακες A,B αντιστρέφονται.

Απάντηση

(2) $\Rightarrow 2A=-B-2\lambda B\overset{(1)}{\Rightarrow}(\lambda^2+\lambda^4)B=-B-2\lambda B\Rightarrow(\lambda^2+\lambda^4+2\lambda+1)B=0\Leftrightarrow$

$\left[(\lambda+1)^2+\lambda^4\right]\cdot B=0$ και επειδή $(\lambda+1)^2+\lambda^4\neq 0$ για κάθε $\lambda\in R$ είναι $B=0$

άρα ο B δεν αντιστρέφεται.

Από **(1)** $\Rightarrow 2A=0\Rightarrow A=0$ άρα ο A δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 24.Δ

Έστω A τετραγωνικός 2x2 πίνακας και α πραγματικός αριθμός τέτοι
ώστε : $|\alpha\cdot A|+|-2\cdot A|=\alpha^2+2\alpha+4$ (1)

α) Δείξτε ότι : $|\alpha\cdot A|=\alpha^2|A|$

β) Βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ορίζουσας A

Απάντηση

α) Έστω $A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$, τότε $\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha x_1 & \alpha x_2\\ \alpha x_3 & \alpha x_4\end{bmatrix}$ με $|\alpha A|=\begin{vmatrix}\alpha x_1 & \alpha x_2\\ \alpha x_3 & \alpha x_4\end{vmatrix}$

$\alpha^2x_1x_4-\alpha^2x_3x_2=\alpha^2(x_1x_4-x_3x_2)=\alpha^2\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{vmatrix}=\alpha^2|A|$

β) (1) $\Leftrightarrow\alpha^2|A|+4|A|=\alpha^2+2\alpha+4\Leftrightarrow|A|=\frac{\alpha^2+2\alpha+4}{\alpha^2+4}\Leftrightarrow|A|=1+\frac{2\alpha}{\alpha^2+4}$

α	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f		↘	ε	↗	μ	↘	

Έστω $|\ /\ | = f(\alpha)$ δηλ. $f(\alpha) = 1 + \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+4}$

Είναι $f'(\alpha) = \dfrac{2(\alpha^2+4)-4\alpha^2}{(\alpha^2+4)^2} = \dfrac{8-2\alpha^2}{(\alpha^2+4)^2} =$

$= \dfrac{-2(\alpha^2-4)}{(\alpha^2+4)^2}$. Ελάχ.τιμή: $f(-2) = 1 + \dfrac{-4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Μέγ. τιμή : $f(2) = 1 + \dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 25.Δ

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 2-\alpha \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}$ **,** $\alpha \in R$

α) Να βρεθεί πίνακας X : $A^{65}X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(1)**

β) Εάν για τον πίνακα B ισχύει $B(A+I) = I + B$ **(2) να δείξετε ότι** $B = A$

Απάντηση

α) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ άρα $A^{-1} = A$

$A^{65} = A^{64} \cdot A = (A^2)^{32} \cdot A = I^{32} \cdot A = A$

(1) $\Rightarrow AX = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ *(πολ/ζω με Α)* $X = A\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3-\alpha & 3-2\alpha \\ \alpha-2 & 2\alpha-1 \end{bmatrix}$

β) (2) $\Rightarrow BA + B = I + B \Rightarrow BA = I \Rightarrow$ *(πολ/ζω με Α)* $B = A$

Προτεινόμενο

Δίνεται το σύστημα : $\left.\begin{matrix} \lambda x - y + z = y \\ x + y + z = 3\lambda y \\ x - 2y + 5\lambda z = 4z \end{matrix}\right\}$ **(Σ)**

και $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$ **δύο λύσεις αυτού. Εάν επιπλέον ισχύει:**

$\int_0^{\lambda}(2x-3)dx = \dfrac{3-7\lambda}{2}$ **, δείξτε ότι οι αριθμοί :** $x_1 + x_2$ **,** $y_1 + y_2$ **,** $z_1 + z_2$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 26.Δ *(Ζήτημα 1ο της 4ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. Δίνονται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda-6 & -2 \end{bmatrix}$ **όπου** $\lambda \in R - \left\{-\dfrac{1}{5}, 0\right\}$ **και τ**

σύστημα : $\begin{cases} 2x + 14y - 11\omega = 0 \\ 2\lambda x - 2\lambda y + \omega = \lambda + 2 \\ \lambda x + y - \lambda\omega = 1 \end{cases}$ **(Σ) . Αν το (Σ) δεν έχει μοναδικ**

λύση, να λύσετε την εξίσωση : $A^{1821} \cdot X + A^{1940} = 2 \cdot I$

Β. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ **(1)**

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε τ κέντρο και την ακτίνα.

β) Να προσδιορίσετε το $\alpha \in R$ **ώστε η ευθεία που ορίζεται από τ σημεία** $A(3, 2\alpha)$ **και** $B(-1, -\alpha)$ **να διέρχεται από το κέντρο το προηγούμενου κύκλου.**

Απάντηση

Α. Επειδή το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση είναι :

$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 14 & -11 \\ 2\lambda & -2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η $\lambda = -1/5$

άρα $\lambda = 1$ διότι $\lambda \in R - \{0, -1/5\}$.

Για $\lambda=1$ ο πίνακας γίνεται $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = -I$

$A^{1821} = A^{2 \cdot 910} \cdot A = (A^2)^{910} \cdot A = (-1)^{910} \cdot A = A$

$A^{1940} = (A^2)^{970} = (-1)^{970} = I$, οπότε η εξίσωση γίνεται : $A \cdot X + I = 2I \Leftrightarrow$

$A \cdot X = I \Leftrightarrow X = A^{-1} = -A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ διότι $A^2 = -I \Leftrightarrow A(-A) = I \Leftrightarrow A^{-1} = -A$

Β. α) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^3$. Επομένως παρ στάνει κύκλο με κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ=3.

β) Η ευθεία AB έχει $\lambda = \dfrac{2\alpha + \alpha}{3+1} = \dfrac{3\alpha}{4}$ άρα εξίσωση : $y - 2\alpha = \dfrac{3\alpha}{4}(x-3)$

$\Leftrightarrow 4y - 8\alpha = 3\alpha x - 9\alpha \Leftrightarrow -3\alpha x + 4y + \alpha = 0$.

Θέτω x=1 , y=2 οπότε : $-3\alpha + 8 + \alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$

ΘΕΜΑ 27.Δ *(Ζήτημα 2ο της 4ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}-x\ ,\ x\in R$

Α. α) Να λύσετε την εξίσωση : $e^x+x=1$

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα.

Β. α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία : $y=-x+1$

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to+\infty$

Απάντηση

Α. α) Προφανής λύση x=0 . Αν $g(x)=e^x+x-1\Rightarrow g'(x)=e^x+1>0$ άρα η g γν. αύξουσα οπότε η x=0 μοναδική.

β) $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}-1=\dfrac{1-x}{e^x}-1=\dfrac{1-x-e^x}{e^x}=-\dfrac{e^x+x-1}{e^x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x+x-1<0\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)<g(0)\Leftrightarrow x<0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	ο.μ 0	↘	

Επομένως η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη θέση x=0 έχει μέγιστο f(0)=0 .

Β. α) Αν $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής πρέπει :

$f'(x_0)=-1\Leftrightarrow-\dfrac{e^{x_0}+x_0-1}{e^{x_0}}=-1\Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-1=e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=1$, οπότε εξίσωση εφαπτομένης είναι η : $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\left(\dfrac{1}{e}-1\right)=-1(x-1)\Leftrightarrow$

$y=-x+1/e-1+1\Leftrightarrow y=-x+1/e$

β) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{e^x}-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

$f(x)-\alpha x=\dfrac{x}{e^x}-x+x=\dfrac{x}{e^x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

Επομένως ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y=-x$

ΘΕΜΑ 28.Δ *(Ζήτημα 3ο της 4ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq$ τότε, για κάθε αριθμό κ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχι ένας $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει : $f(x_0)=\kappa$.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ . Αν ισχύει : $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Β. Έστω η συνάρτηση f με f' συνεχή στο R .

Αν $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, να βρείτε το : $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x-\eta\mu x}\cdot\int_0^x xf(t)dt\right)$

Απάντηση

Α. α) , β) Βλέπε σχ. Βιβλίο

Β. Είναι : $\int_0^x xf(t)dt=x\int_0^x f(t)dt$. Επειδή η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσ είναι και συνεχής άρα : $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x f(t)dt=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}x\int_0^x f(t)dt=0$.

Έχουμε λοιπόν απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ όπου οι συναρτήσεις

$x\int_0^x f(t)dt$, $x-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμες οπότε κατά το κανόνα D.L Hospital είναι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x xf(t)dt}{x-\eta\mu x}\overset{0/0}{=}....=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{0/0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(x)+xf'(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2f(x)}{\eta\mu x}+\dfrac{f'(x)}{\eta\mu x/x}\right)=2f'(0)+f'(0)=3f'(0)=3$

αφού $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f(x)}{\eta\mu x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\overset{0/0}{=}2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2f'(0)}{1}=2f'(0)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

και επειδή $f'(x)$ συνεχής $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$

ΘΕΜΑ 29.Δ *(Ζήτημα 4ο της 4ης δέσμης του τοπικού διαγωνισμού)*

Α. Έστω ο πίνακας $M=\begin{bmatrix}6x & x & 6\\ 2 & x & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ **, $x\in R$ και τα ενδεχόμενα Α,Β**

δειγματικού χώρου Ω. Αν P(A), P(B) ρίζες της εξίσωσης $|M| = 8x - 6$ και $P(A) < P(B)$, να αποδείξετε ότι :

α) Τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα. β) $\frac{5}{12} \le P(A\cap B) \le \frac{3}{4}$

Β. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 4 - x^2$ και η ευθεία ε : $y = 4 - \alpha^2$ όπου $0 < \alpha < 2$. Να βρείτε το α ώστε το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x'x, να διαιρείται από την ευθεία ε σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Απάντηση

Α. α) $|M| = \begin{vmatrix} 6x & x & 6 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ *(αναπτ. κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής)* .... $= 12x^2 - 9x$

Επομένως $|M| = 8x - 6 \Leftrightarrow 12x^2 - 9x = 8x - 6 \Leftrightarrow 12x^2 - 17x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, επομένως $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$.

Αν Α, Β ασυμβίβαστα $P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} > 1$ άτοπο.

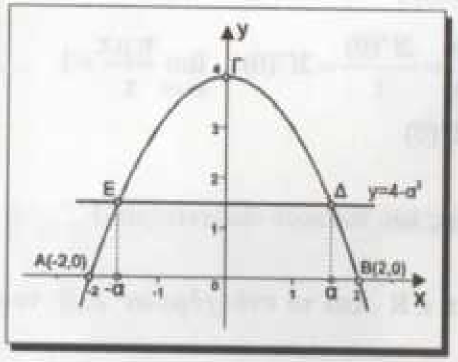
Άρα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Είναι $A\cap B \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) \le P(B) \Rightarrow P(A\cap B) \le \frac{3}{4}$.

$P(A\cap B) \ge \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cup B) \ge \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{17}{12} - P(A\cup B) \ge \frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B) \le \frac{17}{12} - \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(A\cup B) \le 1$ αληθής.

Β.



Τετμημένες σημείων τομής της ευθείας με την C_f :

$4 - \alpha^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm\alpha$

Από την εκφώνηση έχουμε :

$$\frac{\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx}{\int_{-\alpha}^{\alpha}(4 - x^2 - 4 + \alpha^2)dx} = 2 \Leftrightarrow ....$$

$.... \Leftrightarrow 8\alpha^3 = 32 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{4}$

ΘΕΜΑ 30.Δ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

α) Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση.

β) Να βρείτε το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της εξίσωσ $x^3 + 4 = \alpha x^2$ με τη βοήθεια της προηγούμενης γραφικής παράστασης.

Απάντηση

Πεδίο ορισμού της f : $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

α) $f(x) = x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$ και $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$ για κάθε $x \in A$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x - 2)(x^2 + 2x + 4) > 0$

x	-∞	0		2	+∞
x^3	−	‖	+	0	+
x-2	−	‖	−	0	+
x^2+2x+4	+	‖	+		+
f'(x)	+	‖	−		+

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

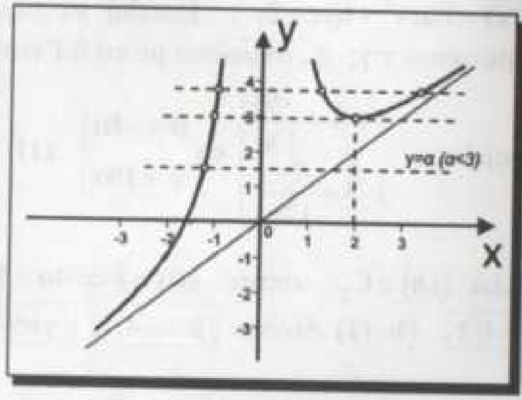
Επειδή $f(x) - x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2} = 0$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγ ασύμπτωτη της f στο ±∞.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$. Άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφ ασύμπτωτη της f.

x	-∞	0		2	+∞
f'	+	‖	−	0	+
f''	+	‖	+		+
f	y=x ↗ +∞	‖	+∞ ↘	3 Τ.Ε.	↗ y=x

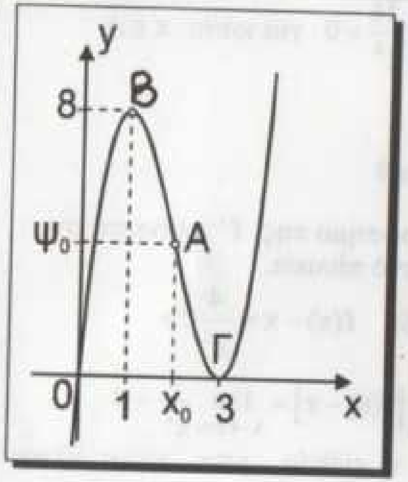


β) Η εξίσωση $x^3 + 4 = \alpha x^2$ δεν έχει ρίζα x=0. Επομένως ισοδυναμεί με την $\frac{x^3 + 4}{x^2} = \alpha$.

Ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f και της ευθείας $y=\alpha$. Επομένως:

- Αν $\alpha<3$ η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο, επομένως η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα και μάλιστα αρνητική.
- Αν $\alpha=3$ η εξίσωση έχει μία αρνητική ρίζα και μία θετική διπλή την $x=2$.
- Αν $\alpha>3$ η εξίσωση έχει τρεις ρίζες, μία αρνητική και δύο θετικές.

ΘΕΜΑ 31.Δ



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της 1ης παραγώγου της συνάρτησης:

$$f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2$$

α) Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες (x_0,y_0) του σημείου A.

γ) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκουν.

Απάντηση

α) Είναι $f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x$. Έστω $g(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x$, $x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$. Επειδή τα σημεία 1,3 είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της g, σύμφωνα με το θ.Fermat θα είναι ρίζες της g'.

Επομένως $\left.\begin{array}{l}1+3=\dfrac{-6\beta}{12\alpha}\\ 1\cdot 3=\dfrac{2\gamma}{12\alpha}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=-8\alpha\\ \gamma=18\alpha\end{array}\right\}$ **(1)**

Αλλά $(1,8)\in C_g$, οπότε $g(1)=8\Leftrightarrow 4\alpha+3\beta+2\gamma=8\overset{(1)}{\Leftrightarrow}4\alpha-24\alpha+36\alpha=8\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha=1/2}$. Οι **(1)** δίνουν $\boxed{\beta=-4}$, $\boxed{\gamma=9}$.

β)

Μετά τον προσδιορισμό των α,β,γ η g γίνεται: $g(x)=2x^3-12x^2+18x$ **(2)**

Είναι $g'(x)=6x^2-24x+18$, $g''(x)=12x-24$

Επειδή το A είναι σημείο καμπής της g είναι:

$g''(x_0)=0\Leftrightarrow 12x_0-24=0\Leftrightarrow\boxed{x_0=2}$

Η **(2)** δίνει $y_0=g(2)\Leftrightarrow y_0=2\cdot 2^3-12\cdot 2^2+18\cdot 2\Leftrightarrow\boxed{y_0=4}$

γ) A(2,4), B(1,8), Γ(3,0)

$\left.\begin{array}{l}\lambda_{AB}=\dfrac{8-4}{1-2}=\dfrac{4}{-1}=-4\\ \lambda_{A\Gamma}=\dfrac{0-4}{3-2}=\dfrac{-4}{1}=-4\end{array}\right\}\Rightarrow$ Α,Β,Γ συνευθειακά. Ανήκουν στην ευθε

που διέρχεται από το Γ και έχει $\lambda=-4$ δηλαδή στην $y-0=-4(x-3)=$

$\Rightarrow\boxed{y=-4x+12}$.

ΘΕΜΑ 32.Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,1] με συνεχή παράγωγο σ [0,1], $f'(0)>0$ και $f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\alpha\in(0,1)$: $f'(\alpha)=\alpha$

β) Υπάρχει $x_0\in(0,\alpha)$: $f'(x_0)=2x_0$

Απάντηση

α) Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$, $x\in[0,1]$. Είναι:

$\left.\begin{array}{l}g(0)=f(0)\\ g(1)=f(1)-\dfrac{1}{2}=f(0)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow g(0)=g(1)$

Η g είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμη στ (0,1) με $g'(x)=f'(x)-x$.

Άρα **(θ.Rolle)** υπάρχει $\alpha\in(0,1)$: $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow f'(\alpha)-\alpha=0\Leftrightarrow f'(\alpha)=\alpha$.

β) Έστω η συνάρτηση $h(x)=f'(x)-2x$, $x\in[0,\alpha]$. Είναι:

$\left.\begin{array}{l}h(0)=f'(0)>0\\ h(\alpha)=f'(\alpha)-2\alpha=\alpha-2\alpha=-\alpha<0\end{array}\right\}\Rightarrow h(0)\cdot h(\alpha)<0$

Επειδή η h είναι συνεχής, υπάρχει **(θ.Bolzano)** $x_0\in(0,\alpha)$: $h(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=2x_0$.

Σημείωση: ***Η υπόθεση: $f'(x)$ συνεχής στο [0,1] μαζί με την $f'(0)>0$ μας οδήγη στην εφαρμογή του θ.Bolzano.***

ΘΕΜΑ 33.Δ

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=x$ και τις ευθείες $x=x_1$, $x=x_2$, όπου x_1,x_2 ακρότατα της $f(x)$ στο $[-\pi,\pi]$

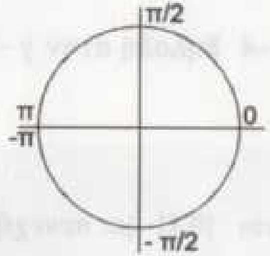
Απάντηση

$f(x)=\eta\mu x \Rightarrow f'(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$

Άρα

$x_1=-\dfrac{\pi}{2}$,

$x_2=\dfrac{\pi}{2}$



x	-π	- π/2	0	π/2	π
f'	−	0	+	0	−
f	↘	Τ.ε	↗	Τ.μ	↘

$$E=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\eta\mu x-x|dx$$

Ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in R$. Δηλαδή :

$\eta\mu x\le x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και $-\eta\mu x\le -x \Leftrightarrow \eta\mu x\ge x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$. Άρα :

$$E=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\eta\mu x-x|dx=\int_{-\pi/2}^{0}|\eta\mu x-x|dx+\int_{0}^{\pi/2}|\eta\mu x-x|dx=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{0}(\eta\mu x-x)dx+\int_{0}^{\pi/2}(x-\eta\mu x)dx=\left[-\sigma\upsilon\nu\, x-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi/2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu\, x\right]_{0}^{\pi/2}=$$

$$\left(-1+\frac{\pi^2}{8}\right)+\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ **α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\pi^2\left(1-x^2\right)\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2}$ και να εξηγηθεί γιατί έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$**

β) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

Απάντηση : $A=\ldots(-5,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,3)\cup(3,5)\ldots$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=4\pi$

ΘΕΜΑ 34.Δ

Ο πληθυσμός ενός χωριού ελαττώνεται με ρυθμό ανάλογο υπαρχόντων κατοίκων. Στην απογραφή του 1960 το χωριό είχε κατοίκους, ενώ στην απογραφή του 1980 βρέθηκαν 1800 κάτοικοι.
α) Πόσους κατοίκους είχε το χωριό στην απογραφή του 1950 ;
β) Πόσοι κάτοικοι θα έχουν απομείνει στο χωριό το 2000 ;

Απάντηση

Έστω Π(t) ο πληθυσμός ως συνάρτηση του χρόνου. Θεωρούμε ως α μέτρησης του χρόνου το 1960 οπότε :

Για το 1960 : $t=0$
- » - 1980 : $t=20$
- » - 1950 : $t=-10$
- » - 2000 : $t=40$

Είναι $\Pi'(t)=-\kappa\,\Pi(t)$, $\kappa>0 \Rightarrow \dfrac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}=-\kappa \Rightarrow \displaystyle\int\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}dt=\int -\kappa\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\Pi(t)=-\kappa t+c \Rightarrow \Pi(t)=e^{-\kappa t+c}\Rightarrow \Pi(t)=e^{c}\cdot e^{-\kappa t}$ **(1)**

Η (1) για $t=0$ δίνει : $e^c=2000$ και για $t=20$ δίνει :

$1800=2000\cdot e^{-20\kappa}\Rightarrow e^{-20\kappa}=\dfrac{9}{10}\Rightarrow -20\kappa=\ln(0{,}9)\Rightarrow \kappa=-\dfrac{1}{20}\ln(0{,}9)$

Άρα η **(1)** γράφεται : $\Pi(t)=2000\cdot e^{\frac{t}{20}\ln(0,9)}=2000\cdot\left[e^{\ln(0,9)}\right]^{\frac{t}{20}}\Rightarrow$

$\Pi(t)=2000\cdot(0{,}9)^{t/20}$ **(2)**

α) Για $t=-10$ έχουμε από τη **(2):** $\Pi(-10)=2000\cdot(0{,}9)^{-1/2}=2000\cdot\left(\dfrac{10}{9}\right)$

$=2000\cdot\sqrt{\dfrac{10}{9}}=2000\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{3}\cong 2108$.

Άρα το 1950 υπήρχαν περίπου 2108 κάτοικοι.

β) Για $t=40$ η **(2)** δίνει : $\Pi(40)=2000\cdot(0{,}9)^2=1620$.

Άρα το 2000 θα έχουν απομείνει 1620 κάτοικοι.

ΘΕΜΑ 35.Δ

Βιομηχανία παράγει x μονάδες προϊόντος την ημέρα και τις πουλάει σ τιμή $T(x)=5500-\dfrac{1}{4}x$ δρχ. ανά μονάδα. Το συνολικό κόστος παραγω είναι $K(x)=250000+2500\cdot x$ δρχ. την ημέρα και για κάθε μονάδα προϊόντος που πουλάει η βιομηχανία πληρώνει φόρο φ δρχ.

α) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής (συναρτήσει του φ) ώστε το ημερήσιο κέρδος της βιομηχανίας να γίνει μέγιστο.
β) Με δεδομένη την πρόθεση της βιομηχανίας να μεγιστοποιήσει το ημερήσιο κέρδος, να προσδιοριστεί το φ ώστε το κράτος να εισπράττει κάθε μέρα το μέγιστο φόρο.

Απάντηση

α) Έστω $P(x)$ το ημερήσιο κέρδος και $E(x)$ οι ημερήσιες εισπράξεις.

Είναι : $P(x) = E(x) - K(x) - \varphi \cdot x$ **(1)**

Όπου $E(x) = T(x) \cdot x = \left(5500 - \frac{1}{4}x\right)x = 5500 \cdot x - \frac{1}{4}x^2$.

Επομένως η **(1)** γίνεται : $P(x) = 5500 \cdot x - \frac{1}{4}x^2 - 250000 - 2500 \cdot x - \varphi \cdot x =$

$= -\frac{1}{4}x^2 + (3000 - \varphi) \cdot x - 250000 \Rightarrow$

$P'(x) = -\frac{x}{2} + 3000 - \varphi = \frac{6000 - 2\varphi - x}{2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6000 - 2\varphi$ μονάδες ανά ημέρα.

Η μονοτονία της $P(x)$ και το ακρότατο φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	0	$6000-2\varphi$	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$
$P(x)$	↗	ο.μ	↘

β) Το κράτος εισπράττει ημερησίως από φόρους το ποσό :

$\Pi(\varphi) = \varphi \cdot x = \varphi(6000 - 2\varphi) = 6000\varphi - 2\varphi^2$

Είναι $\Pi'(\varphi) = 6000 - 4\varphi$

$\Pi'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow 6000 - 4\varphi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi = 1500$.

Η μονοτονία και το ακρότατο της $\Pi(\varphi)$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	1500	$+\infty$
$\Pi'(\varphi)$	$+$	0	$-$
$\Pi(\varphi)$	↗	4500000 ο.μ	↘

Επομένως με φόρο 1500 δρχ./μονάδα το κράτος έχει το μέγιστο ημερήσιο έσοδο.

ΘΕΜΑ 36.Δ

α) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και m , M η ελάχιστη και η μέγιστη αντίστοιχα τιμή της f στο [α,β]. Να αποδεχθεί ότι:

$m(\beta - \alpha) \le \int_a^b f(x)dx \le M(\beta - \alpha)$ **(1)**

β) Να αποδεχθεί ότι : $1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le e$

γ) Να μελετηθεί η μονοτονία της $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$

και να βρεθεί το $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}dt$

Απάντηση

α) Κατά το **Θ.Μ.Τ.** του ολοκληρωτικού λογισμού, υπάρχει $\xi \in [\alpha$

τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)f(\xi)$ οπότε η **(1)** γίνεται :

$m(\beta - \alpha) \le (\beta - \alpha)f(\xi) \le M(\beta - \alpha) \overset{\beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} m \le f(\xi) \le M$ που ισχύει.

β) Έστω η συνάρτηση : $f(x) = e^{x^2}$, $x \in [0,1]$ συνεχής.

Είναι $f'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα η f γν. αύξουσα στο [0

οπότε $m = f(0) = 1$ και $M = f(1) = e$. Επομένως σύμφωνα με το συμπέρασ

του (α) ερωτήματος είναι : $1(1-0) \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le e(1-0) \Rightarrow 1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le e$

γ) $f'(t) = \frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}$, $t \in [x, x+1] \subseteq (0, +\infty)$, άρα $f'(t) < 0$ οπότε η f εί

γν. φθίνουσα στο $[x , x+1]$ δηλαδή :

$m = f(x+1) = \frac{1}{1+(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$ και $M = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Άρα σύμφω

με την **(1)** : $\frac{1}{x^2+2x+2}(x+1-x) \le \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}dt \le \frac{1}{1+x^2}(x+1-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+2} \le \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}dt \le \frac{1}{1+x^2}$.

Όμως $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Α

σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής είναι : $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}dt = 0$

ΘΕΜΑ 37.Δ

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ **με** $\alpha, \beta \in R$ **και** $|A + I_2| = 15$, $|A - 2I_2| =$

α) Να υπολογιστεί το $\alpha\cdot\beta$ και το $\alpha+\beta$

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το σύστημα:

$\left.\begin{array}{l}\alpha x+y=\lambda x\\ x+\beta y=\lambda y\end{array}\right\}$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Απάντηση

α) $A+I_2=\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+1 & 1\\ 1 & \beta+1\end{bmatrix}\Rightarrow |A+I_2|=\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1\\ 1 & \beta+1\end{vmatrix}=$

$=(\alpha+1)(\beta+1)-1=\alpha\beta+\alpha+\beta+1-1=\alpha\beta+(\alpha+\beta)\Rightarrow \alpha\beta+(\alpha+\beta)=15 \quad (1)$

$A-2I_2=\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha-2 & 1\\ 1 & \beta-2\end{bmatrix}\Rightarrow |A-2I_2|=\begin{vmatrix}\alpha-2 & 1\\ 1 & \beta-2\end{vmatrix}=$

$=(\alpha-2)(\beta-2)-1=\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4-1=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+3\Rightarrow \alpha\beta-2(\alpha+\beta)=-3$

(2)$(1)-(2)\Rightarrow 3(\alpha+\beta)=18\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=6}$ και από (1) $\Rightarrow \boxed{\alpha\beta=9}$

β) $\left.\begin{array}{l}\alpha x+y=\lambda x\\ x+\beta y=\lambda y\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\alpha-\lambda)x+y=0\\ x+(\beta-\lambda)y=0\end{array}\right\}$. Πρέπει $\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & 1\\ 1 & \beta-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)-1=0\Leftrightarrow \alpha\beta-\alpha\lambda-\beta\lambda+\lambda^2-1=0\Leftrightarrow \lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+9-1=0\Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+8=0\Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}$ ή $\boxed{\lambda=4}$

ΘΕΜΑ 38.Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$. Αν $F(\beta)>0$ να δειχθεί ότι η F είναι γν.αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$

Απάντηση

Είναι $F'(x)=f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ (1)

Επειδή είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ θα δείξω ότι η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

Αν υπήρχαν $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\kappa)f(\lambda)<0$ τότε από **θ.Bolzano** θα υπήρχε $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ άτοπο. Άρα $f(x)>0$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Άρα από (1) η F είναι γν.αύξουσα ή γν.φθίνουσα.

Είναι όμως $F(\alpha)=0$ και $F(\beta)>0$ δηλαδή $F(\alpha)<F(\beta)$ άρα η F αποκλείεται να είναι γν. φθίνουσα, άρα είναι γν. αύξουσα.

ΘΕΜΑ 39.Δ

Έστω xOy σύστημα ορθογωνίων αξόνων και τα σημεία $A(0,2)$, B(

και $M(x,0)$, $x>0$ και $\hat{\varphi}=A\hat{M}B$.

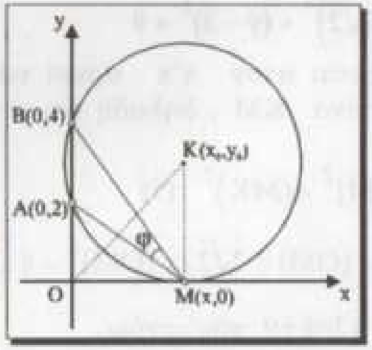
α) Να υπολογιστεί η εφφ ως συνάρτηση του x

β) Να βρεθεί το x ώστε η γωνία φ να είναι μέγιστη.

γ) Για την τιμή του x του β) ερωτήματος να βρεθεί η εξίσωση κύκλου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABM.

δ) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x'x.

Απάντηση



α) Είναι $\varphi=O\hat{M}B-O\hat{M}A\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\dfrac{\varepsilon\varphi O\hat{M}B-\varepsilon\varphi O\hat{M}A}{1+\varepsilon\varphi O\hat{M}B\cdot\varepsilon\varphi O\hat{M}A}=\dfrac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x}\cdot\frac{2}{x}}=$

$=\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+8}{x^2}}=\dfrac{2x}{x^2+8}$. Άρα $\boxed{\varepsilon\varphi\varphi=\dfrac{2x}{x^2+8}}$

β) Για να γίνει η οξεία γωνία φ μέγιστη *(επειδή η συνάρτηση εφαπτο είναι γν. αύξουσα στο (0,π/2))* αρκεί η εφφ να γίνει μέγιστη.

Έστω $\varepsilon\varphi\varphi=g(x)=\dfrac{2x}{x^2+8}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{2(x^2+8)-2x\cdot 2x}{(x^2+8)^2}=\dfrac{16-2x^2}{(x^2+8)^2}$.

x	0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		+	0	−	
g		↗		↘	

$g'(x)=0\Leftrightarrow 16-2x^2=0\Leftrightarrow x^2=8\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=2\sqrt{}$

$g'(x)>0\Leftrightarrow 16-2x^2>0\Leftrightarrow x^2<8\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<2\sqrt{}$

Επομένως η g(x)=εφφ γίνεται μέγιστη ό $x=2\sqrt{2}$

γ) Έστω $K(x_0,y_0)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ρ η ακτ του

Τότε η εξίσωσή του είναι: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

Επειδή ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(0,4)$, $\Gamma(2\sqrt{2},0)$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}(-x_0)^2+(2-y_0)^2=\rho^2\\(-x_0)^2+(4-y_0)^2=\rho^2\\\left(2\sqrt{2}-x_0\right)^2+(-y_0)^2=\rho^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-4y_0+4=\rho^2 & (1)\\x_0^2+y_0^2-8y_0+16=\rho^2 & (2)\\x_0^2+y_0^2-4\sqrt{2}\cdot x_0+8=\rho^2 & (3)\end{cases}$$

Από $(2)-(1)\Rightarrow 4y_0-12=0\Leftrightarrow y_0=3 \quad (4)$

Από $(1)-(3)\Rightarrow 4\sqrt{2}\cdot x_0-4y_0-4=0\overset{(4)}{\Leftrightarrow}4\sqrt{2}\cdot x_0=16\Leftrightarrow x_0=2\sqrt{2}$

Άρα $K\left(2\sqrt{2},\ 3\right)$. Οπότε $(1)\Rightarrow\rho^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2-4\cdot 3+4=9\Rightarrow\rho=3$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι : $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+(y-3)^2=9$

δ) Για να αποδείξουμε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον $x'x$ αρκεί να δείξουμε ότι ο $x'x$ είναι κάθετος στην ακτίνα KM, δηλαδή ότι το τρίγωνο OKM είναι ορθογώνιο.

Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι : $(OK)^2=(OM)^2+(MK)^2 \quad (5)$

Είναι $(OK)=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{17}\Rightarrow(OK)^2=17$, $(OM)=2\sqrt{2}\Rightarrow(OM)^2=8$, $(MK)=3\Rightarrow(MK)^2=9$, οπότε η (5) γίνεται 17=8+9 που ισχύει.

__2ος τρόπος__ : Επειδή $x_M=x_K=2\sqrt{2}$ είναι $KM\perp x'x$ οπότε η $x'x$ εφάπτεται του κύκλου.

ΘΕΜΑ 40.Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2-x+\alpha$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in[-1,1]$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την f και τον άξονα $x'x$.

β) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Απάντηση

α) Θα βρούμε πρώτα τις τομές της f με τον άξονα $x'x$.

$f(x)=0\Leftrightarrow x^3-\alpha x^2-x+\alpha=0\Leftrightarrow x^2(x-\alpha)-(x-\alpha)=0\Leftrightarrow(x-\alpha)\left(x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\alpha$, $x=-1$, $x=1$, δηλαδή -1 η μικρότερη και 1 η μεγαλύτερη ρίζα. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E=\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha x^2-x+\alpha\right|dx$$

Θα βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=x^3-\alpha x^2-x+\alpha$ στο διάστημα $[-1,1]$. Είναι $f(x)=(x-\alpha)(x-1)(x+1)$.

x	-1		α		1	
f(x)	− 0	+	0	−	0	+

Από το διπλανό πίνακα προκύπτε[ι]
αν $f(x)\geq 0$ $x\in[-1,\alpha]$ και
αν $f(x)\leq 0$ $x\in[\alpha,1]$ οπότε

$$E=\int_{-1}^{\alpha}\left(x^3-\alpha x^2-x+\alpha\right)dx-\int_{\alpha}^{1}\left(x^3-\alpha x^2-x+\alpha\right)dx\Rightarrow$$

$$E=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_{-1}^{\alpha}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_{\alpha}^{1}\Rightarrow\ldots$$

$$\Rightarrow\boxed{E=-\frac{\alpha^4}{6}+\alpha^2+\frac{1}{2}}\ ,\ \alpha\in[-1,1]$$

β) $E'=-\frac{4\alpha^3}{6}+2\alpha=-\frac{2\alpha^3}{3}+2\alpha=\frac{-2\alpha^3+6\alpha}{3}=\frac{-2\alpha\left(\alpha^2-3\right)}{3}$

α	$-\sqrt{3}$	-1		0		1	$\sqrt{3}$	
E'	+ 0		−	0	+		0	−
E		4/3	↘	1/2	↗	4/3		

$E'=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\alpha=\pm\sqrt{3}$
Από το διπλανό πίνακα πρ[οσήμων]
της E' προκύπτει ότι το E [έχει]
ελάχιστο για α=0 οπότε
$E_{min}=1/2$ τ.μ.

Επειδή η συνάρτηση $E=-\frac{\alpha^4}{6}+\alpha^2+\frac{1}{2}$ είναι συνεχής στο [...]

προκύπτει ότι σύνολο τιμών του εμβαδού είναι το $\left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$, οπ[ότε για]

$\alpha=-1$ ή $\alpha=1$ είναι $E_{max}=4/3$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 41.Δ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^{(x-1)^2}$ και $g(x)=(\kappa x+\mu)x^2+5$, $\kappa,\mu\in$ [...]

Αν το ακρότατο της f είναι σημείο καμπής της g τότε :

α) Να προσδιοριστούν τα κ , μ και να μελετηθούν οι f , g ως [προς τη] μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν x_1 είναι η θέση του σημείου καμπής και x_2 , x_3 οι θέσ[εις των] τοπικών ακροτάτων της g , να αποδείξετε ότι τα σημεία :

$A(x_1,g(x_1))$, $B(x_2,g(x_2))$, $\Gamma(x_3,g(x_3))$ είναι συνευθειακά.

Απάντηση

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	1 (ο.ε.)	↗	

α) $f'(x) = 2(x-1)e^{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)e^{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

Η μονοτονία της f και το ακρότατο φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

► $g(x) = \kappa x^3 + \mu x^2 + 5 \Rightarrow g'(x) = 3\kappa x^2 + 2\mu x \Rightarrow g''(x) = 6\kappa x + 2\mu$

Αφού το ακρότατο της f είναι σημείο καμπής της g θα είναι :

$$\left.\begin{matrix} g''(1) = 0 \\ g(1) = 1\ ,\ \left((1,1) \in C_g\right) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 6\kappa + 2\mu = 0 \\ \kappa + \mu = -4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \kappa = 2 \\ \mu = -6 \end{matrix}}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		+	0	−	0	+	
g		↗	5 (τ.μ.)	↘	-3 (τ.ε.)	↗	

Επομένως για τη g θα έχουμε :

$g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$

$g'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ,\ x = 2$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

β) Σημείο καμπής της g : A(1,1)

Για τις θέσεις ακροτάτων της g : $\begin{cases} B(0,5) \\ \Gamma(2,-3) \end{cases}$.

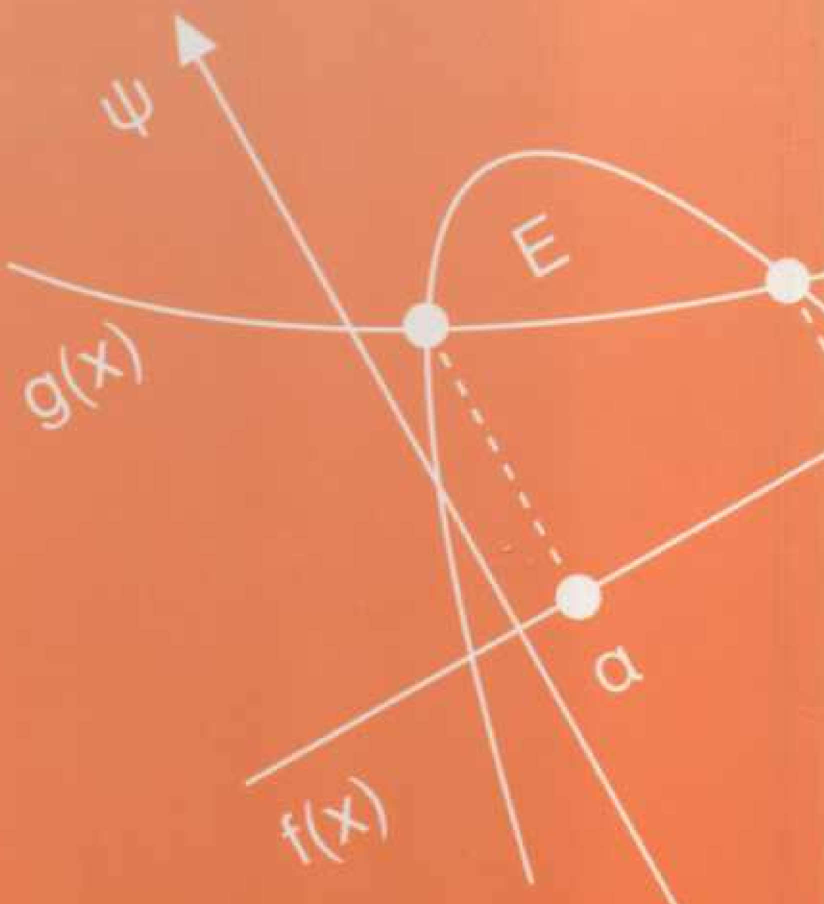
Εξίσωση της ΒΓ : $y = \lambda x + \mu \Rightarrow \begin{cases} 5 = \lambda \cdot 0 + \mu \\ -3 = 2 \cdot \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 5 \\ \lambda = -4 \end{cases}$

Άρα η εξίσωση της ΒΓ είναι: $y = -4x + 5$ **(1)**

Το σημείο A(1,1) ανήκει στη ΒΓ αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την **(1)**.

Άρα τα Α , Β , Γ είναι συνευθειακά.

— ΤΕΛΟΣ —


ψ
E
g(x)
α
f(x)